

Zur Anziehung leitender Ebenen im Vakuum

Autor(en): **Fierz, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **33 (1960)**

Heft VIII

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-113101>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zur Anziehung leitender Ebenen im Vakuum

von **M. Fierz**

(Genf, CERN)

M. J. SPARNAAY¹⁾ ist es gelungen, die Kraft, mit welcher sich zwei Metallplatten zufolge der Quantennatur des elektromagnetischen Strahlungsfeldes anziehen, experimentell nachzuweisen. CASIMIR²⁾ hat die Grösse dieser Kraft unter der Annahme berechnet, dass nur die Nullpunktsenergie des Strahlungsfeldes dazu etwas beitrage. Da aber die Messungen bei Zimmertemperatur ausgeführt worden sind, und da bei hohen Temperaturen die Plancksche Temperaturstrahlung die Wirkungen der Nullpunktsenergie genau kompensiert, so erhebt sich die Frage, ob es berechtigt ist, bei den vorliegenden Experimenten die Temperaturstrahlung zu vernachlässigen. Denn die für dieses Experiment charakteristische Grösse

$$X = \frac{2 \pi k T a}{\hbar c}$$

wo a der Plattenabstand bedeutet, ist keineswegs klein gegen eins.

Wir nennen $V(a, T)$ die potentielle Energie pro Flächeneinheit eines ungeladenen Plattenkondensators mit dem Plattenabstand a und bei der Temperatur T . Diese rührt erstens von der Nullpunktsenergie und zweitens von der thermischen Energie des elektromagnetischen Feldes her. Der Vollständigkeit halber wollen wir hier beide Teile berechnen; der Beitrag des ersten Teiles ist gerade der, auf den sich CASIMIR beschränkt hat.

Das Potential der Nullpunktsenergie

Da die Nullpunktsenergie divergent ist, betrachte man drei planparallele Platten, die die Abstände a und $A - a$ voneinander besitzen. Man berechne mit Hilfe eines geeigneten konvergenzerzeugenden Faktors die Energie dieser Anordnung und subtrahiere davon die Energie der gleichen Anordnung mit $a = A/2$. Nach der Subtraktion lässt man den Konvergenzfaktor verschwinden und macht schliesslich noch $A \rightarrow \infty$. Auf diese Weise erhält man eine endliche Potentielle Energie $J(a)$ als Funktion des Abstandes a .

Wir rechnen im folgenden in Einheiten, in denen $\hbar = c = k = 1$ gesetzt sind. (N.B.: \hbar ist die Plancksche Konstante $6,24 \cdot 10^{-27}$ erg. s, k die Boltzmannsche Konstante.)

Die Kondensatorplatten werden als ideale Leiter behandelt, auf denen die tangentielle elektrische Feldstärke verschwindet. Daher sind die möglichen Eigenfrequenzen durch

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + x^2 + y^2} \quad (1)$$

gegeben, mit $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ (N.B.: $n = 0$ kommt einmal, $n \neq 0$ zweimal vor.) Die potentielle Energie unserer Anordnung ist darum durch

$$J(a) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \{ E(\alpha, a) + E(\alpha, A - a) - 2 E(\alpha, A/2) \} \quad (2)$$

gegeben mit

$$E(\alpha, a) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx dy \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + x^2 + y^2} \cdot e^{-\alpha \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + x^2 + y^2}}$$

α ist ein konvergenzerzeugender Faktor. Mit

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 (x^2 + y^2) = z \quad (3)$$

kann $E(\alpha, a)$ wie folgt geschrieben werden:

$$E(\alpha, a) = - \frac{d^3}{d\alpha^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{8} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z+1} e^{-\frac{n}{a} \alpha \sqrt{z+1}} \quad (4)$$

Nun kann man die Summe über n ausführen und hernach das Integral über z . So erhält man

$$E(\alpha, a) = \frac{\pi}{4a} \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{a/\alpha}{e^{\alpha/a} - 1} \quad (5)$$

Weil

$$\frac{y}{e^y - 1} = \sum_v \frac{B_v}{v!} y^v,$$

so gilt

$$E(\alpha, a) = \frac{\pi}{4a} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_v \frac{B_v}{v!} \cdot \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{v-2}. \quad (6)$$

Setzt man diesen Ausdruck in $J(a)$ ein, so heben sich dort die Terme mit $\nu = 0, 1$ fort. Darum kann man $\alpha = 0$ und hernach $A = \infty$ setzen und erhält

$$J(a) = \frac{\pi}{2} \frac{B_4}{4!} \frac{1}{a^3}.$$

Das ist das Resultat von CASIMIR.

Die Energie der Temperaturstrahlung

Da die Energie der Temperaturstrahlung endlich ist, genügt es hier, nur zwei Platten im Abstand a zu betrachten. Die Energie pro Flächeneinheit ist durch

$$E_T(a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} dx dy \frac{\nu(n)}{e^{\nu(n)/T} - 1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} b(n); \quad (7)$$

$$\nu(n) = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + x^2 + y^2}.$$

gegeben. Auf (7), wenden wir nun die Poissonsche Summenformel an, die lautet:

Wenn

$$c_m = \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) e^{-2\pi imx} dx$$

gesetzt wird, so ist

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} b(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m.$$

Es ist hier

$$c_m = \frac{a}{2} \int_0^{\infty} dx dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{r e^{-2\pi imaz}}{e^{r/2T} - 1}; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (8)$$

Man erkennt nun, dass c_0 der bekannte Ausdruck für die Energiedichte $U(T)$ der schwarzen Strahlung ist, der noch mit a multipliziert erscheint. Dieser Beitrag zum Strahlungsdruck im Inneren wird durch den äusseren Strahlungsdruck kompensiert, weshalb es auf

$$E_T(a) - a U(T) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m \quad (9)$$

ankommt. Denn es ist ja $c_m = c_{-m}$. Eine leichte Rechnung ergibt nun

$$c_m = \frac{2 T^3}{m} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu \frac{\sin 4\pi a T m \nu}{e^{\nu} - 1} = \frac{2 T^3}{m} J_m. \quad (10)$$

Mit Hilfe einer bei WHITTAKER-WATSON angegebenen Formel*) (Chapt. VI, Example 2, p. 122) lässt sich auch das Integral J_m ausführen, und man erhält

$$J_m = \frac{1}{(4\pi maT)^3} - \frac{\pi^3 Ch 4\pi^2 maT}{(Sh 4\pi^2 maT)^3}. \quad (11)$$

*) Auf diese Formel machte mich Herr Professor W. PAULI in einem Brief vom 30. 10. 58 aufmerksam.

Das Gesamtpotential $V(a, T)$

Setzt man (10), (11) in (9) ein, und bildet

$$J(a) + E_T(a) - c_0 = V(a, T), \quad (12)$$

so erkennt man, dass der erste Term in J_m , wegen

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi}{4!} B_4 \quad (13)$$

$J(a)$ genau kompensiert. Daher ist

$$V(a, T) = -(\pi T)^3 \cdot 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Ch 4 \pi^2 maT}{m(Sh 4 \pi^2 maT)^3}. \quad (14)$$

Weil $E_T(a)$ für $T = 0$ verschwindet, ist natürlich

$$V(a, 0) = J(a),$$

was man aus (14), mit Hilfe von (13), leicht erkennt.

Will man $V(a, T)$ mit $J(a)$ vergleichen, so hat man die Funktion

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^3 Ch mx}{m(Sh mx)^3}, \quad \text{mit } x = 4 \pi^2 aT \quad (15)$$

zu betrachten.

Die Summe über m in (15) konvergiert für alle x sehr schnell; es genügt praktisch das erste Glied, $m = 1$, zu betrachten.

Ist $0 < x < 1$, so ist $f(x)$ nahezu konstant; für $x > 1$ verschwindet $f(x)$ sehr schnell.

(Man findet $f(0) = 1,08$; $f(1) = 0,98$; $f(2) = 0,63$; $f(3) = 0,27$; $f(4) = 0,07$.)

Der kritische Abstand a , bei welchem bei Zimmertemperatur ($T = 300^\circ$) der Effekt noch praktisch demjenigen bei $T = 0$ entspricht, ist somit durch $x = 1$ oder

$$a = \frac{\hbar c}{2\pi kT} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (16)$$

gegeben.

Die Messungen sind im Intervall $(0,5 < a < 2) \cdot 10^{-4}$ cm durchgeführt worden, wobei der Effekt unterhalb 10^{-4} cm deutlich nachweisbar war. In diesem Gebiet kann die Temperaturstrahlung gerade vernachlässigt werden.

Literaturverzeichnis

¹⁾ M. J. SPARNAAY, *Physica* 24, 751 (1958).

²⁾ H. B. G. CASIMIR, *Proc. kon. Ned. Akad. Wetenschap* 51, 793 (1948).