# Die Normalform einer komplexen Lorentztransformation

Autor(en): **Jost, Res**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **33 (1960)**

Heft VIII

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-113095

# Die Normalform einer komplexen Lorentztransformation

von **Res Jost**
E T H, Zürich

*Zusammenfassung.* Zwei komplexe Lorentztransformationen $A$ und $B$ heissen äquivalent, falls es zwei reelle Transformationen $\Lambda_1$ und $\Lambda_2$ in $L_+^\uparrow$ derart gibt, dass $A = \Lambda_1 B \Lambda_2$. Die so definierten Äquivalenzklassen werden durch die Konstruktion einer Normalform für jede Klasse vollständig charakterisiert. Im letzten Paragraphen wird ein Satz bewiesen, der die Verbindung zu den Untersuchungen von BARGMANN, HALL und WIGHTMAN schafft.

## § 1. Einleitung

Die komplexen Lorentztransformationen spielen seit einiger Zeit eine bedeutende Rolle in denjenigen Arbeiten, die sich mit den Grundlagen der quantisierten Feldtheorien befassen[1]). Für den physikalisch interessanten Fall von vier Dimensionen ist es wohl am einfachsten, zur Analyse der komplexen Lorentzgruppe den bekannten Isomorphismus dieser Gruppe mit dem direkten Produkt von zwei speziellen linearen Gruppen in zwei Dimensionen auszunützen. Doch haftet dieser Methode besonders im Hinblick auf die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen etwas Künstliches an. Wir geben deshalb im folgenden eine Analyse von komplexen Lorentztransformationen, bei der die Dimensionszahl nebensächlich ist. Es ist dabei das Ziel, die Analyse so zu leiten, dass die Verallgemeinerung der Resultate[2]) von V. BARGMANN, D. HALL und A. WIGHTMAN auf allgemeine Dimensionszahlen evident wird. Das wesentliche Hilfsmittel wird in Form eines Satzes formuliert.

Im Hinblick auf diese Anwendung wird überall nur das Skalarprodukt

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - \cdots - x^n y^n$$

in Betracht gezogen.

Der Hauptteil der Note besteht darin, für rein imaginäre*) Lorentztransformationen eine Normalform zu finden. Die zugehörigen Rechnungen unterscheiden sich wenig von denjenigen, die erforderlich sind, um die Normalform einer reellen Lorentztransformation zu gewinnen[3]). Der Vollständigkeit halber sind sie aber trotzdem wiedergegeben.

---

*) Dieser Ausdruck erscheint nicht sehr glücklich, doch fiel es mir schwer, einen besseren zu finden.

Diese Note geht auf eine Anregung von F. J. DYSON und auf eine kritische Bemerkung von V. BARGMANN zurück. Ihnen beiden gilt auch hiefür mein freundschaftlicher Dank.

## § 2. Definitionen

1. Metrik

$$(x, x) = (x^0)^2 - \sum (x^k)^2 = x^T G x$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & -1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

2. Transponierte einer Matrix: $M^T$
   Hermitische Konjugierte: $M^*$
   Komplex Konjugierte: $M' = M^{T*}$
3. Reelle Lorentztransformation $\Lambda$: $\Lambda^{-1} = G\,\Lambda^T\,G$, $\Lambda' = \Lambda$.
   Einskomponente der reellen Lorentzgruppe: $L_+^\uparrow$.
   $\Lambda \in L_+^\uparrow$ hat die Determinante $+1$ und transformiert den Vorkegel $V_+ = \{x;\, x^0 > 0,\, (x, x) > 0\}$ in sich.
4. Komplexe Lorentztransformation $A$: $A^{-1} = G\,A^T\,G$
   Einskomponente der komplexen Lorentzgruppe $L_+(C)$.
   $A \in L_+(C)$ hat die Determinante $+1$.
5. $M \in L_+(C)$ heisst rein imaginär, falls $M'\,M = 1$.
6. Äquivalenz zweier komplexer Lorentztransformationen: $A \sim B$, falls es $\Lambda_{1,2} \in L_+^\uparrow$ gibt, derart, dass $A = \Lambda_1\,B\,\Lambda_2$.

Das Ziel der Untersuchung besteht darin, zu jeder der durch 6. definierten Äquivalenzklassen eine Normalform zu gewinnen. Dazu ist es nötig, zunächst eine Normalform für eine rein imaginäre Lorentztransformation zu suchen.

## § 3. Normalform einer rein imaginären Lorentztransformation

1. *Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms* $\chi(\lambda) = \mathrm{Det}\,(M - \lambda \cdot 1)$ (*Eigenwerte*)

a) Aus $\chi(\lambda) = 0$ folgt $\chi(\lambda^{-1}) = 0$. Das gilt für eine beliebige Lorentztransformation. Mit $\lambda$ ist also auch $\lambda^{-1}$ Eigenwert.

b) $\chi(\lambda)$ ist ein reelles Polynom, denn

$$\chi^*(\lambda) = \mathrm{Det}\,(M^* - \lambda\,1) = \mathrm{Det}\,(M'^T - \lambda \cdot 1)$$
$$= \mathrm{Det}\,\big((M^{-1})^T - \lambda\,1\big) = \mathrm{Det}\,\big(G\,(M - \lambda\,1)\,G\big) = \chi(\lambda).$$

Also sind die Eigenwerte von $M$ entweder reell oder sie treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

Im folgenden brauchen wir zwei trivale Lemmata:

*Lemma 1:*

$\alpha$) Zwei reelle orthogonale Nullvektoren sind linear abhängig.

$\beta$) Falls ein komplexer Nullvektor $x$ auf dem komplex konjugierten $x'$ orthogonal steht, dann sind $x$ und $x'$ linear abhängig.

*Lemma 2:* Sei $Mx = \lambda x$ und $My = \mu y$, dann ist $(x, y) = \lambda\mu(x, y)$, also ist entweder $(x, y) = 0$ oder $\lambda\mu = 1$.

c) Falls $\lambda$ ein komplexer Eigenwert von $M$ ist, dann ist $\lambda^* = \lambda^{-1}$ also $|\lambda| = 1$.

*Beweis:* Aus $Mx = \lambda x$ folgt $Mx' = \lambda^{*-1} x'$. Nach Lemma 2 $(x, x) = (x, x') = 0$ also sind $x$ und $x'$ nach Lemma 1 linear abhängig und daher $\lambda^{*-1} = \lambda$.

Ausserdem kann $x$ jetzt reell gewählt werden und desgleichen $y$, der Eigenvektor zu $\lambda^{-1}$. Es gilt $(x, x) = (y, y) = 0$, also ist $(x, y) \neq 0$ und bei passender Normierung $(x, y) = 1$.

Dann sind die Vektoren $\xi = 2^{-\frac{1}{2}} (x + y)$ und $\eta = 2^{-\frac{1}{2}} (x - y)$ orthogonal und normiert: $(\xi, \xi) = - (\eta, \eta) = 1$. Es kann also nur einen komplexen Eigenwert geben, und der durch $(M - \lambda 1)$ annihilierte Raum ist linear.

2. *Das Auftreten von nicht linearen Elementarteilern*

a) Zu einem komplexen Eigenwert $\lambda^* \neq \lambda$ gibt es nur lineare Elementarteiler.

*Beweis:* Sei

$$Mx = \lambda x \quad \text{und} \quad My = i\lambda x + \lambda y.$$

$x$ kann reell gewählt werden gemäss 1c. Dann folgt

$$My' = i\lambda x + \lambda y'.$$

woraus $M(y' - y) = \lambda(y' - y)$. Es kann also auch $y$ (das nur modulo $x$ definiert ist) als reell vorausgesetzt werden. Nun folgt weiter neben $(x, x) = 0$ auch $(Mx, My) = \lambda^2(x, y)$, also $(x, y) = 0$ und $(My, My) = \lambda^2(y, y)$, also auch $(y, y) = 0$. Das ist nach Lemma 1 ein Widerspruch.

*Folgerung:* Es kann höchstens ein Paar von einfachen, konjugiert komplexen Eigenwerten geben.

b) Zu einem reellen Eigenwert $\lambda \neq \pm 1$ gibt es nur lineare Elementarteiler.

*Beweis:* Sei $\lambda^{-1} \neq \lambda = \lambda^*$ und

$$\begin{aligned} Mx &= \lambda x & My &= x + \lambda y \\ Mx' &= \lambda^{-1} x' & My' &= -\lambda^{-2} x' + \lambda^{-1} y'. \end{aligned}$$

Daraus $(x, x) = 0$, $(M x', M y) = \lambda^{-1}(x, x') + (x', y)$, also auch $(x, x') = 0$ und daher $x$ und $x'$ linear abhängig, was nur für $\lambda = \lambda^{-1}$ möglich ist.

c) Es gibt höchstens *einen* nichtlinearen Elementarteiler, der entweder zum Eigenwert $\lambda = +1$ oder $\lambda = -1$ gehört und nur auftritt, falls alle Eigenwerte reell sind. Ein solcher Elementarteiler ist 3. Grades.

*Beweis:* Sei $\lambda^2 = 1$ und

$$M x = \lambda x \qquad M y = i \lambda x + \lambda y,$$

dann ist

$$M x' = \lambda x' \qquad M y' = i \lambda x' + \lambda y'.$$

Nach b) ist $(x, x') = 0$. Ausserdem $(M x, M y) = i(x, x) + (x, y)$, also $(x, x) = 0$; $x$ und $x'$ sind linear abhängig. Daher kann $x$ und ebenso $y$ als reell vorausgesetzt werden. Schliesslich gilt $(M y, M y) = 2 i(x, y) + (y, y)$, also ist auch $(x, y) = 0$. Nun sei $x_1$ ein weiterer Eigenvektor $M x_1 = \mu x_1$, dann folgt, falls $\mu = \lambda$ ist, wie oben aus $(M x_1, M y) = i(x_1, x) + (x, y)$ auch $(x_1, x) = 0$. Das gilt aber nach Lemma 2 auch für $\mu \neq \lambda$.

Alle Eigenvektoren und $y$ sind daher orthogonal zum Nullvektor $x$, spannen also mit $y$ zusammen nicht den ganzen Raum auf. Der Elementarteiler muss also mindestens 3. Grades sein:

$$M z = -\tfrac{1}{2} \lambda x + i \lambda y + \lambda z, \quad M z' = -\tfrac{1}{2} \lambda x + i \lambda y + \lambda z'.$$

$z$ kann wieder reell vorausgesetzt werden.

Es ist $(x, x) = 0$, $(x, y) = 0$ und $(x, z) + (y, y) = 0$. Ein Elementarteiler 4. Grades aber kann nicht vorkommen, denn aus

$$M w = -\tfrac{1}{2} \lambda y + i \lambda z + \lambda w, \ M w' = -\tfrac{1}{2} \lambda y + i \lambda z + \lambda w'$$

folgt $(M x, M w) = i(x, z) + (x, w)$, also $(x, z) = 0$, und daraus nach oben $(y, y) = 0$, was mit $(x, x) = (x, y) = 0$ unverträglich ist.

Oben wurde darauf hingewiesen, dass alle übrigen Eigenvektoren auf $x$ orthogonal sind. Sie spannen also einen rein raumartigen Raum auf. Nach 1c kann daher in diesem Fall kein komplexer Eigenwert vorhanden sein.

### 3. *Die Normalform für M*

a) Es tritt ein Paar komplexer Eigenwerte auf: $\lambda \neq \lambda^*$. Man führt im Raum zu $(\lambda, \lambda^*)$ die Vektoren $\xi$ und $\eta$ aus 1c als Basis ein und setzt $\lambda = e^{i\varphi}$, dann lautet $M$ in diesem Raum

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & i \sin\varphi \\ i \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = K_{\varphi}.$$

Im übrigen hat man nur reelle Eigenwerte und keine höheren Elementar[1] teiler. Sei $\mu \neq \pm 1$ ein Eigenwert zum Eigenvektor $x$, dann gehört $\mu^{-}$- zu $x'$. Im Raum zu $(\mu, \mu^{-1})$ führt man die reellen Vektoren

$$\xi = 2^{-\frac{1}{2}} (x + x'),\ \eta = - i \cdot 2^{-\frac{1}{2}} (x - x')$$

ein. Dann wird

$$(\xi, \xi) = (\eta, \eta) = (x, x') \text{ und } (\xi, \eta) = 0,$$

also muss bei passender Normierung $(\xi, \xi) = (\eta, \eta) = - 1$ sein. Schliesslich setze man $\mu = \pm e^{\chi}$ und findet im Raum zu $(\mu, \mu^{-1})$ für $M$ die Normalform

$$\pm \begin{pmatrix} Ch\chi & iSh\chi \\ -iSh\chi & Ch\chi \end{pmatrix} = \pm L_{\chi}.$$

Als Normalform für $M$ erhält man jetzt

$$M_0 = \begin{pmatrix} K_\varphi & & & & & & \\ & \pm L_{\chi_1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \pm L_{\chi_k} & & & \\ & & & & \pm 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad \text{(a)}$$

b) Es tritt kein komplexer Eigenwert und auch kein nichtlinearer Elementarteiler auf. In diesem Fall ist in der vorstehenden Normalform $K_\varphi$ durch $\pm 1$ zu ersetzen (b).

c) Es treten keine komplexen Eigenwerte auf, aber es gibt einen kubischen Elementarteiler. Mit einer kleinen Modifikation liefert dann 2c) drei reelle Vektoren $x, y, z$ derart, dass für $\lambda = + 1$ oder $\lambda = - 1$ gilt

$$Mx = \lambda x,\ My = \lambda(i\,\tau\, x + y),\ Mz = \lambda(- \tfrac{1}{2}\,\tau^2\, x + i\,\tau\, y + z),$$

mit reellem $\tau \neq 0$. Aus diesen Gleichungen folgt weiter $(x, x) = (x, y) = (y, z) = 0$, $(x, z) + (y, y) = 0$. Ausserdem sind $y$ und $z$ modulo $x$ bestimmt. Es ist daher immer möglich, $(y, y) = - 1$ und $(z, z) = + 1$ anzunehmen. Im Koordinatensystem mit der Basis $z, x - z, y$ lautet $M$, bezogen auf unsern Unterraum,

$$\lambda \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\tau^2 & \frac{1}{2}\tau^2 & i\,\tau \\ -\frac{1}{2}\tau^2 & 1+\frac{1}{2}\tau^2 & i\,\tau \\ i\,\tau & -i\,\tau & 1 \end{pmatrix} = \lambda\, \tilde{K}_\tau,$$

die Normalform also

$$M_0 = \begin{pmatrix} \pm \tilde{K}_\tau & & & & & & \\ & \pm L_{\chi_1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \pm L_{\chi_k} & & & \\ & & & & \pm 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)}.$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & L_{\chi_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\chi_k} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{b}_1)$$

auftreten.

Damit ist die gesuchte Normalform gefunden. Der Zusammenhang mit der Normalform einer reellen Lorentztransformation leuchtet unmittelbar ein.

*Satz:* Jede rein imaginäre Lorentztransformation $M$ lässt sich durch ein $\Lambda \in L_+^\uparrow$ gemäss $\Lambda^{-1} M \Lambda$ auf eine der drei Normalformen (a), (b) oder (c) transformieren.

## § 4. Die Normalform einer komplexen Lorentztransformation

Nun sei $A$ eine komplexe Lorentztransformation, $A \in L_+(c)$. Wir bilden aus $A$ die rein imaginäre Lorentztransformation

$$M = A'^{-1} A = GA^* GA = GR.$$

Offenbar ist $R^* = R$ und die hermitische Form $x^* R x$ hat den Trägheitsindex von $G$. Bei einer reellen Lorentztransformation $\Lambda$ transformiert sich $R$ gemäss $\Lambda^* R \Lambda$. Der Trägheitsindex von $R$ bleibt also erhalten. Nun sei $M_0$ die Normalform von $M$:

$$M_0 = \Lambda^{-1} M \Lambda, \qquad \Lambda \in L_+^\uparrow,$$

$$R_0 = G M_0 = \Lambda^* R \Lambda.$$

Um die möglichen $M_0$ zu bestimmen, haben wir aus den Normalformen des vorigen Abschnittes diejenigen auszuwählen, für die $R_0$ den richtigen Trägheitsindex hat. Für die Trägheitsindices der verschiedenen Kästchen ergibt sich dabei:

$$K_\varphi \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & i \sin\varphi \\ -i \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \text{ mit dem Trägheitsindex } (+, -),$$

$$L_\chi \to \begin{pmatrix} -Ch\chi & -iSh\chi \\ i\,Sh\chi & -Ch\chi \end{pmatrix} \text{ mit dem Trägheitsindex } (-, -),$$

$$\pm 1 \to \mp 1 \quad \text{mit dem Trägheitsindex } \mp.$$

Im Fall a) kommt daher nur in Frage

$$M_0 = \begin{pmatrix} K_\varphi & & & & \\ & L_{\chi_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_{\chi_k} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{a}_1),$$

wobei die 1 in der Hauptdiagonalen nur für ungerade Dimensionszahl auftritt, was durch (1) angedeutet ist.

Der Fall (b) liefert bei gerader Dimensionszahl nur Spezialfälle des Falles (a) mit $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$. Bei ungerader Dimensionszahl aber kann als neuer Fall

Schliesslich ist noch der Trägheitsindex aus $\tilde{K}_\tau$ anzugeben. Dafür findet man $(1, -1, -1)$, so dass die zugehörige Normalform lautet

$$M_0 = \begin{pmatrix} \tilde{K}_\tau & & & & \\ & L_{\chi_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_{\chi_k} & \\ & & & & \boxed{1} \end{pmatrix} (c_1),$$

wobei $\boxed{1}$ diesmal nur bei gerader Dimensionszahl auftritt.

In jedem Fall kann man aus $M_0$ die Quadratwurzel ausziehen und erhält *wieder eine rein imaginäre Lorentztransformation derselben Form.* Dies ist eine Folge der Gleichungen

$$\sqrt{K_\varphi} = K_{\varphi/2}, \qquad \sqrt{L_\chi} = L_{\chi/2}, \qquad \sqrt{\tilde{K}_\tau} = \tilde{K}_{\tau/2}.$$

Setzt man $N = \sqrt{M_0}$, dann hat man simultan $N'\,N = 1$ und $N^{-1} = G\,N^T G$. Es gilt also mit $A_0 = \Lambda^{-1} A\,\Lambda$ die Gleichung $A_0'^{-1} A_0 = N^2$ oder $N^{-1} A_0'^{-1} A_0 N' = 1$, woraus $(A_0' N)^{-1} (A_0 N') = 1$. Also ist $A_0 N' = A_0' N = \Lambda_1$ eine reelle Lorentztransformation der Determinanten $+1$, und wir haben schliesslich

$$A = \Lambda \Lambda_1 N \Lambda^{-1}.$$

Hier sind noch zwei Fälle zu unterscheiden: entweder ist $\Lambda_1 \in L_+^\uparrow$, dann ist unsere Reduktion durchgeführt. $A$ ist dann äquivalent zu einer der Formen $(a_1)$, $(b_1)$ oder $(c_1)$, oder es ist $\Lambda_1 \notin L_+^\uparrow$, dann hat man $\Lambda_1$ von rechts und $N$ von links noch mit einer passenden Spiegelung $P$ zu multiplizieren. Als solche wählt man etwa im Fall $(a_1)$ die Multiplikation der zwei ersten Zeilen mit dem Faktor $-1$, was der Substitution von $K_\varphi$ durch $K_{\varphi+\pi}$ entspricht. Im Fall $(c_1)$ und bei gerader Dimensionszahl kann man $N$ durch $-N$ ersetzen. Die so entstehenden Normalformen sind rein imaginär.

Dies ist nicht notwendig erreichbar für $\Lambda_1 \notin L_+^\uparrow$, ungerade Dimensionszahl und die Fälle $(b_1)$ und $(c_1)$, wo man die folgenden Normalformen wählen kann:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & L^{-}_{\chi_1} & & & \\ & & L_{\chi_2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & L_{\chi_k} \end{pmatrix} \text{ ungerade Dimension } \Lambda_1 \notin L_+^\uparrow$$

oder

$$A \sim \begin{pmatrix} \tilde{K}_\tau^- & & & \\ & L_{\chi_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\chi_k} \end{pmatrix} \text{ ungerade Dimension } \Lambda_1 \notin L_+^\uparrow,$$

wobei

$$L_\chi^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_\chi$$

und

$$\tilde{K}_\tau^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{K}_\tau$$

gesetzt ist.

## § 5. Eine Anwendung

Der folgende Satz bildet das eigentliche Hilfsmittel zum Beweis des ersten Lemmas in der Arbeit von D. Hall und A. Wightman[2]).

*Satz:* Es sei $\zeta = \xi + i\,\eta$ und $\eta \in V_+$. Weiter sei

$$A = \begin{pmatrix} K_\varphi & & & \\ & L_{\chi_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\chi_k} \end{pmatrix}, |\,\varphi\,| < \pi$$

und $$\zeta(\varphi, \chi_1, \ldots, \chi_k) = A(\varphi, \chi_1, \ldots, \chi_k)\,\zeta = \xi(\varphi, \chi) + i\,\eta(\varphi, \chi).$$

Falls nun $\eta(\varphi, \chi_1, \ldots, \chi_k) \in V_+$, dann ist auch $\eta(t\,\varphi, t\,\chi_1, \ldots, t\,\chi_k) \in V_+$ für $0 \leqq t \leqq 1$.

*Beweis:* Es wird

$$\eta^0(\varphi) = \eta^0 \cos\varphi + \xi^1 \sin\varphi > 0$$

und

$$(\eta(\varphi, \chi), \eta(\varphi, \chi)) = A(\varphi) - \sum_n B_n(\chi_n) > 0$$

mit

$$A(\varphi) = (\eta^0 \cos\varphi + \xi^1 \sin\varphi)^2 - (\eta^1 \cos\varphi + \xi^0 \sin\varphi)^2$$

$$B_n(\chi_n) = (\eta^{2n}\, Ch\,\chi_n + \xi^{2n+1}\, Sh\,\chi_n)^2 + (\eta^{2n+1}\, Ch\,\chi_n - \xi^{2n}\, Sh\,\chi_n)^2.$$

Diejenigen Werte von $\varphi$, für welche sowohl $\eta^0(\varphi) > 0$ als auch $A(\varphi) > 0$ sind, bilden offenbar in $|\varphi| < \pi$ ein Intervall, dessen Länge kleiner ist als

$\pi$ und das $\varphi = 0$ enthält. Der Mittelpunkt dieses Intervalls sei $\varphi_0$. Es ist $|\varphi_0| < \pi/2$ und

$$A(\varphi) = \alpha^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) - \beta^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0),$$

wobei auch $|\varphi - \varphi_0| < \pi/2$ ist.

Analog lässt sich auch $B_n(\chi_n)$ auf Diagonalform transformieren (abgesehen von Ausnahmefällen, die aber durch ein Stetigkeitsargument erledigt werden können):

$$B_n(\chi_n) = \alpha_n^2\, Ch^2\,(\chi_n - \chi_n^0) + \beta_n^2\, Sh^2\,(\chi_n - \chi_n^0).$$

Es ist also

$$(\alpha^2 + \beta^2) \cos^2(\varphi - \varphi_0) > \beta^2 + \sum \alpha_n^2 + \sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2)\, Sh^2\,(\chi_n - \chi_n^0)$$

oder:

$$F(t) = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \cos\,(t\,\varphi - \varphi_0) - \sqrt{a^2 + \sum b_n^2\, Sh^2\,(t\,\chi_n - \chi_n^0)}$$

ist für $t = 0$ und $t = 1$ (wegen $|\varphi_0| < \pi/2$ und $|\varphi - \varphi_0| < \pi/2$) positiv. Dabei wurde

$$a^2 = \beta^2 + \sum \alpha_n^2 \quad \text{und} \quad b_n^2 = \alpha_n^2 + \beta_n^2$$

gesetzt.

Nun ist aber $F(t)$ konvex, solange $\cos\,(t\,\varphi - \varphi_0) > 0$ ist, wie sich durch Ausrechnen der zweiten Ableitung ergibt:

$$F''(t) = -\,(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}\, \varphi^2 \cos\,(t\,\varphi - \varphi_0) - G(t)$$

$$G(t) = [a^2 + \sum b_h^2\, Sh^2\,(t\,\chi_n - \chi_n^0)]^{-3/2}\, G_1\,(t)$$

und

$$\begin{aligned} G_1\,(t) = a^2 & \sum \chi_n^2\, b_n^2\, (C_n^2 + S_n^2) \\ & + (\sum b_n^2\, S_n^2)\, (\sum \chi_n^2\, b_n^2\, S_n^2) \\ & + \{(\sum b_n^2\, S_n^2)\, (\sum \chi_n^2\, b_n^2\, C_n^2) - (\sum b_n^2\, \chi_n\, S_n\, C_n)^2\}, \end{aligned}$$

welches offenbar nach der Schwarzschen Ungleichung positiv ist. Als Abkürzung wurde dabei $S_n = Sh(t\,\chi_n - \chi_n^0)$ und $C_n = Ch(t\,\chi_n - \chi_n^0)$ verwendet.

Also ist für $0 \leqq t \leqq 1$

$$F(t) \geqq (1 - t)\, F(0) + t\, F(1) \geqq \text{Min}\,(F(0),\, F(t)),$$

andererseits aber für dasselbe $t$-Intervall

$$(\eta\,(t\,\varphi,\, t\,\chi),\; \eta\,(t\,\varphi,\, t\,\chi)) \geq [F(t)]^2,$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

## Literaturverzeichnis


1) A. Wightman, Phys. Rev. *101*, 860 (1956). – D. Hall und A. Wightman, Mat-fys. Medd. *31*, No. 5 (1957). – G. Kallén und A. Wightman, Mat.-fys. Skrifter *1*, 6 (1958). – R. Jost, Helv. Phys. Acta *30*, 409 (1957). – N. Burgoyne, Nuovo Cimento *8*, 607 (1958). – R. Jost, *W. Pauli Memorial Volume*, Interscience Press 1960.

2) D. Hall und A. Wightman, loc. cit.[1]).

3) E. Wigner, Annals of Math. *40*, 149 (1939), p. 159 ff.