

Beziehungen zwischen den Clifford'schen Zahlen und den Spinoren

Autor(en): **Mercier, André**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **14 (1941)**

Heft VII

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111198>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Beziehungen zwischen den Clifford'schen Zahlen und den Spinoren

von André Mercier.

(27. VIII. 41.)

Zusammenfassung. Im ersten Teil dieses Artikels werden algebraische Beziehungen zwischen den Clifford'schen Zahlen und den Spinoren besprochen. Diese Besprechung stützt sich auf Untersuchungen von Marcel Riesz in Lund, von denen derselbe uns mündlich oder durch Mitteilung eines Manuskriptes Kenntnis gegeben hat.

Im zweiten Teil werden geometrische Beziehungen erläutert, die mit Drehungen und Spiegelungen zusammenhängen.

Im ersten Teil ist der Fall des Minowski-Raumes, im zweiten dagegen, der Einfachheit halber, der Fall des gewöhnlichen drei-dimensionalen Raumes behandelt.

I. Teil.

Mittels der Clifford'schen Zahlen können Probleme der speziellen Relativitätstheorie behandelt werden. In der Raum-Zeit seien vier Grundeinheiten Γ_i eingeführt; sie unterliegen den Bedingungen $\Gamma_i \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_i = 2 \delta_{ik}$. Eine Clifford'sche Zahl C ist wie folgt definiert

$$C = a + \sum_{i=1}^4 \alpha_i \Gamma_i + \sum_{ik} \beta_{ik} \Gamma_i \Gamma_k + \sum_{ikl} \gamma_{ikl} \Gamma_i \Gamma_k \Gamma_l + \delta \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4. \quad (1)$$

Ist S der 4-dimensionale Clifford'sche Vektor des elektrischen Stromes¹⁾²⁾, und F eine Clifford'sche Zahl, die das elektromagnetische Feld zu beschreiben vermag, so lassen sich die Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum in der folgenden einzigen Clifford'schen Gleichung zusammenfassen:

$$\nabla \rightarrow F = -S.*)$$

F ist ein Bivektor, und kann aus einem Vektor Φ , genannt Potential, wie folgt abgeleitet werden:

$$F = \nabla \rightarrow \Phi.$$

Dann muss die Lorentz'sche Bedingung für Φ erfüllt werden.

Die Dirac'sche Gleichung für ein Elektron der Ladung e , das sich in einem elektromagnetischen Feld befindet, lautet¹⁾:

$$(\nabla \rightarrow + \beta \Phi) \psi + \alpha \psi = 0, \quad (2)$$

wo α^{-1} gleich der Compton'schen Wellenlänge ist und $\beta = e/\hbar c$.

*) Für die Bezeichnungen siehe 1) oder 2).

(2) ist automatisch Lorentz-invariant; α ist eine skalare Grösse, $\nabla \rightarrow + \beta \Phi$ ein Vektor-Operator. Da Φ bis auf die Tatsache, dass es die Lorentz'sche Bedingung erfüllen muss, *beliebig* ist, besagt die Dirac'sche Gleichung u. a., dass die Anwendung eines Vektors *von links aus* auf eine Wellenfunktion eine Operation darstellt, die wiederum eine Wellenfunktion liefert. Im allgemeinen würde man erwarten, dass ψ eine vollständige Clifford'sche Zahl der Form (1) sein kann. Die Tatsache, die wir gerade erkannt haben, lässt aber vermuten, dass ψ einer ganz speziellen Klasse von Gebilden angehört.

Wir haben damals gezeigt³⁾, dass wenn ψ eine Clifford'sche Zahl mit reellen Koeffizienten $a, \alpha_i, \dots, \delta$ ist, sich die sechzehn unter (2) zusammengefassten Gleichungen *im Falle* $\Phi = 0$ auf acht unabhängige Gleichungen reduzieren lassen. Dies spricht schon dafür, dass ψ eine besondere Zahl ist.

Dass ψ einer speziellen Klasse angehören muss, weil *von links aus* mit einem Vektor darauf operiert wird, wurde von M. RIESZ erkannt. Ihm kam der Gedanke, ψ als Element eines *Linksideals* des Körpers der Clifford'schen Zahlen zu betrachten. In der Tat: Eine Submenge $\{ \Psi \}$ der Clifford'schen Zahlen muss gefunden werden derart, dass die Multiplikation von links, mit einem beliebigen Clifford'schen Vektor X , eines beliebigen Elements Ψ dieser Submenge wiederum ein Element derselben ergibt:

$$\{ X\Psi \} \equiv \{ \Psi \}. \quad (3)$$

Sind daneben Ψ_1 und Ψ_2 zwei Elemente von $\{ \Psi \}$, so muss

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi \quad (4)$$

wegen (2) auch Element von $\{ \Psi \}$ sein. (3) und (4) sind die Bedingungen für die Definition eines Linksideals. Sie beziehen sich aber nur noch auf Vektoren X . Statt (3) sollte man $\{ C\Psi \} \equiv \{ \Psi \}$ schreiben können. Wir geben jetzt den Beweis, dass dies möglich ist. Allgemein hat C die Form (1), also ist

$$\begin{aligned} C\Psi &= a\Psi + \Sigma \alpha_i \Gamma_i \Psi + \Sigma \beta_{ik} \Gamma_i \Gamma_k \Psi + \dots \\ &= (a\Psi) + \Sigma \alpha_i (\Gamma_i \Psi) + \Sigma \beta_{ik} \Gamma_i (\Gamma_k \Psi) + \dots \\ &= \dots, \end{aligned}$$

wo jede Klammer auf Grund von (3) wiederum ein Ψ darstellt, weil Γ_i ein Vektor ist, so dass sich schliesslich $C\Psi$ als eine lineare Kombination von Grössen darstellen lässt, welche alle ein Ψ oder $X\Psi$ sind.

Damit lässt sich Ψ als Element des Linksideals

$$\{C\Psi\} \equiv \{\Psi\} \quad (5)$$

deuten. Die Aufstellung von (5) ist nur dann möglich, wenn die Koeffizienten $a, \alpha_i, \beta_{ik}, \dots$ komplex sind, und verlangt die Einführung von Nullteilern, wie RIESZ gezeigt hat. RIESZ schlägt vor, den Nullteiler

$$e = \frac{\Gamma_1 + i\Gamma_3}{2} \cdot \frac{\Gamma_1 - i\Gamma_3}{2} \cdot \frac{\Gamma_2 + i\Gamma_4}{2} \cdot \frac{\Gamma_2 - i\Gamma_4}{2} \neq 0$$

zu bilden, und dann ist

$$\{Ce\} = \{s\} \quad (6)$$

die Klasse der Zahlen Ψ , die er als Lösungen von (2) betrachtet (C ist eine beliebige Clifford'sche Zahl). (6) ist tatsächlich ein Linksideal von $\{C\}$. Dieses Ideal $\{s\}$ kann mit Hilfe folgender Basis u_0, \dots, u_{12} dargestellt werden:

$$u_0 = e, \quad u_1 = \frac{\Gamma_1 - i\Gamma_3}{2} e, \quad u_2 = \frac{\Gamma_2 - i\Gamma_4}{2} e, \quad u_{12} = \frac{\Gamma_1 - i\Gamma_3}{2} \cdot \frac{\Gamma_2 - i\Gamma_4}{2} e,$$

und zwar ist

$$s = s_0 u_0 + s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_{12} u_{12},$$

wo s_1, \dots, s_{12} komplexe Koeffizienten sind. Schreibt man

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_{12} \end{pmatrix} = \mathfrak{s},$$

so ist die Matrix \mathfrak{s} das, was man gewöhnlich unter *Spinor* versteht*).

Die transponierten Spinoren werden als Elemente eines Rechtsideals $\{eC\}$ definiert, ausgehend von der assoziierten Dirac'schen Gleichung¹⁾

$$\psi'(\leftarrow \nabla - \beta \Phi) + \psi' \alpha = 0.$$

II. Teil.

Der Einfachheit halber sei jetzt der drei-dimensionale Raum E_3 unseren Betrachtungen zugrunde gelegt. Nur drei Einheiten $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ kommen in Frage. Es sei $\vartheta/2$ der Winkel zwischen zwei Ebenen π_A und π_B , \vec{L} der Einheitsvektor längs des Schnittes von π_A und π_B , \vec{A} und \vec{B} die Einheitsvektoren senkrecht zu π_A und π_B . \vec{A}, \vec{B} und \vec{L} entsprechen Clifford'schen Vektoren A, B

*) Die interessanten Untersuchungen von Franz⁷⁾ sind denjenigen ähnlich, welche in unserem I. Teil besprochen sind.

und L . Eine Drehung um \tilde{L} des Körpers der Clifford'schen Vektoren X um den Winkel ϑ wird mit Hilfe des Operators

$$\sigma = BA = \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} L \Gamma$$

nach folgendem Schema erzeugt:

$$X \rightarrow \sigma X \sigma^{-1} \quad \text{wo} \quad \sigma \sigma^{-1} = 1.$$

$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ ist die pseudo-skalare oder trivektorielle Einheit in E_3 . Der Operator

$$1 + \varrho_j = 1 + \frac{\varepsilon_j}{2} \Gamma_j \Gamma$$

erzeugt eine infinitesimale Drehung um den Winkel ε_j um Γ_j . Dabei geht ein Vektor X in

$$X' = (1 + \varrho_j) X (1 + \varrho_j)^{-1} = (1 + \varrho_j) X (1 - \varrho_j)$$

über und ändert sich um

$$dX|_j = (X' - X)|_j = \frac{\varepsilon_j}{2} [\Gamma_j X - X \Gamma_j] = \varrho_j X - X \varrho_j.$$

Bei einer infinitesimalen Drehung um \tilde{L} variiert X um

$$dX = \frac{\varepsilon}{2} [LX - XL] \Gamma. \quad (7)$$

Wir werden jetzt gewisse Grössen ξ definieren.

Der Ausdruck (7) für dX ist symmetrisch aber nicht einfach. Man kann Grössen definieren, die sich einfacher transformieren. Sie werden zu den Spinoren isomorph sein. *Definition:*

Es gibt die ξ und die ξ^* ;

$\xi_1 + \xi_2$ ist ein ξ , $\xi_1^* + \xi_2^*$ ist ein ξ^* (diese Summen sind assoziativ und kommutativ);

"" ist eine auf ξ angewandte Operation, welche ξ^* zu ξ assoziiert; ferner ist $(\xi^*)^* = \xi$, $(\xi_1^* \xi_2)^* = \xi_2^* \xi_1$, $(\xi_1 \xi_2^*)^* = \xi_2 \xi_1^*$; ist m eine (komplexe) Zahl, so ist $m\xi$ ein ξ , und $(m\xi)^* = m\xi^*$;

das Produkt zweier ξ ist sinnvoll, ebenso dasjenige zweier ξ^* ; dagegen sind Produkte von der Form $\xi_1 \xi_2^*$ oder $\xi_1^* \xi_2$ sinnvoll; endlich transformieren sich ξ und ξ^* während der infinitesimalen Drehung (7) wie folgt:

$$d\xi|_j = \varrho_j \xi, \quad d\xi^*|_j = \xi^* \varrho_j^{-1}, \quad d\xi = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \xi. \quad (8)$$

Dann ist

$$\xi' = \xi + \int d\xi = \sigma\xi \quad \text{und} \quad \xi^{*\prime} = \xi^* + \int d\xi^* = \xi^* \sigma^{-1}.$$

Aus (8) folgt: Sind ξ und η zwei solche Zahlen, so sind

$$J_{\xi\eta} = \xi^*\eta \quad \text{und} \quad J_{\eta\xi} = \eta^*\xi$$

gegenüber Drehungen invariant. Postuliert wird auch, dass $J_{\xi\eta}$ gegenüber Spiegelungen invariant ist. $J_{\xi\eta}$ ist also skalar. Dagegen sind

$$P_{\xi\eta} = \xi\eta^* \quad \text{und} \quad P_{\eta\xi} = \eta\xi^*$$

nicht invariant. Wenn $\xi = \eta$, schreiben wir P_ξ statt $P_{\xi\xi}$ und J_ξ statt $J_{\xi\xi}$.

Die genaue Beziehung zwischen ξ^* und ξ wird unter (11) präzisiert werden. Das Ausrechnen zeigt, dass

$$P_{\xi\eta} P_{\xi\eta} = J_{\eta\xi} P_{\xi\eta}. \quad (9)$$

Also: $P_{\xi\eta}$ ist eine Art Projektor, der nicht nur projiziert, sondern auch im Verhältnis $J_{\eta\xi} : 1$ verzerrt. Auf Wunsch kann ξ normiert werden, z. B. dadurch, dass $J_\xi = 1$.

Unter zwei Umständen wird (9) erfüllt: Entweder ist

$$J_{\eta\xi} \neq 0 \quad (10)$$

oder gleich Null; im letzteren Falle ist auch $P_{\xi\eta}^2 = 0$. Dieser Fall diene zur Definition von ξ^* : Ist $P_{\xi\eta}^2 = 0$, so ist $\eta = \xi = \xi_s$; ξ_s wird als *einfach* bezeichnet. Also:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\xi = 0 \\ P_\xi^2 = 0 \end{array} \right\} \text{ Definition der Beziehung zwischen } \xi_s \text{ und } \xi_s^*. \quad (11)$$

P_ξ ist in (11) eine isotrope Zahl P_ξ^i , in E_3 also einem isotropen Vektor \vec{P}_ξ^i zugeordnet: $\vec{P}_\xi^i \cdot \vec{P}_\xi^i = 0$.

Rechnet man

$$\zeta = P_\xi \xi = \begin{cases} 0 \\ J_\xi \xi \neq 0 \end{cases}$$

aus, so sieht man, dass, wenn \vec{P}_ξ ein isotroper Vektor \vec{P}_ξ^i ist, der zugeordnete Clifford'sche Vektor das zugeordnete *einfache* ξ_s verschwinden lässt: $P_\xi^i \xi_s = 0$.

Definiert man

$$P_{\xi\zeta}^* = P_{\zeta\xi},$$

so ist

$$P_{\xi\zeta}^* P_{\xi\zeta} = J_\xi P_\zeta \quad \text{und} \quad P_\xi^* = P_\xi,$$

und also

$$\xi_s^* P_\xi^i = \xi_s^* P_\xi^i = 0.$$

Weiter transformiert P_η jedes ξ in ein Vielfaches von η (von links aus):

$$P \xi = J_{\eta \xi} \eta.$$

Sind jetzt ξ_s und ζ_s *einfach*, und keine Vielfache voneinander, so ist ihre Summe nicht einfach, denn

$$J_{\xi_s} + J_{\zeta_s} = 2 J_{\xi_s \zeta_s} \neq 0.$$

Den Definitionen (8) und (11) fügen wir somit folgendes hinzu: Es gibt ein einziges zu ξ_s assoziiertes ξ_s^* ; jedes nicht einfache ξ ist eine lineare Kombination

$$\xi = \sum_n c_n \xi_{n,s} \quad (12)$$

mit komplexen oder reellen Koeffizienten c_n . Dann ist

$$\xi^* = \sum c_n \xi_{n,s}^*.$$

Allgemein gilt $J_{\xi \zeta} = J_{\zeta \xi}$ und $P_\eta P_{\xi \eta} = P_{\eta \xi} P_\eta = J_{\xi \eta} P_\eta$.

Bemerkung. Ersetzt man ξ durch $-\xi$, bzw. ξ^* durch $-\xi^*$, so ist $(-\xi)(-\xi^*) = P_\xi$ und $(-\xi^*)(-\xi) = J_\xi$. Für jede Drehung um $\vartheta = \pi$ ist übrigens $\sigma = -1$.

Eine Reihe Sätze lässt sich ableiten. Z. B. kann man zeigen, dass P_ξ weder eine Invariante, noch ein Vektor, noch ein Bivektor, noch ein Trivektor ist, insofern es kein P^i ist.

Ferner kann man zeigen, dass $P_{\xi \eta}$ im allgemeinen eine Clifford'sche Zahl ist, wo weder die Invariante I , noch der Vektor V , noch der Bivektor $B = \Gamma W$, noch der Trivektor $T = \Gamma K$ fehlen:

$$P_{\xi \eta} = I + V + \Gamma(K + W).$$

Jedoch gibt es Beziehungen zwischen I, V, W und K , wie z. B.:

$$K = i \frac{J_{\xi \eta} - 2I}{2}, \quad (V - iW)^2 = \frac{J_{\xi \eta}^2}{4}.$$

Man kann zeigen, dass $P_{\xi_s \eta}$, $P_{\xi \eta_s}$ und $P_{\xi_s \eta_s}$ Nullteiler sind. Und so fort.

Größen erster Art und zweiter Art. — Die Größen ξ , bzw. ξ^* sind Größen erster Art. Ist A ein Clifford'scher Einheitsvektor, so ist die Grösse

$$\varphi_s = A \xi_s, \quad \text{bzw.} \quad \varphi_s^* = \xi_s^* A$$

kein ξ (kein ξ^*) und soll als einfache Grösse zweiter Art bezeichnet werden. Eine nicht einfache Grösse φ zweiter Art ist definiert als eine Kombination $\varphi = \sum A_n \xi_{s,n}$. Der Ausdruck $J_\varphi = \varphi^* \varphi$ ist dann

gegenüber Drehungen und Spiegelungen invariant. Dagegen ist $\varphi^* \xi$ nur gegenüber Drehungen invariant, weshalb φ und ξ nicht von derselben Art sind.

Es können verschiedene Invarianten und Trivektoren in E_3 gebildet werden. Bezeichnen I eine beliebige Invariante, V einen Vektor, B einen Bivektor und T einen Trivektor, so sind

$\xi^* I \xi$ und $\varphi^* I \varphi$ invariant (gegenüber Drehungen und Spiegelungen),

$\xi^* V \xi$ und $\varphi^* V \varphi$ Trivektoren,

$\xi^* B \xi$ und $\varphi^* B \varphi$ invariant,

$\xi^* T \xi$ und $\varphi^* T \varphi$ Trivektoren,

$\xi^* I \varphi$ und $\varphi^* I \xi$, oder $\xi^* B \varphi$ und $\varphi^* B \xi$ Trivektoren,

$\xi^* V \varphi$ und $\varphi^* V \xi$, oder $\xi^* T \varphi$ und $\varphi^* T \xi$ invariant.

Abbildung durch Matrizen. — Ein isotroper Vektor X^i wird durch drei komplexe Koeffizienten bestimmt, die die Bedingung $(X^i)^2 = 0$ erfüllen. Vier unabhängige reelle Koeffizienten bestimmen somit X^i , wie auch ξ_s , da ξ_s^* durch ξ_s vollständig bestimmt werden muss. Für X^i , im allgemeinen sogar für C kann eine zwei-reihige quadratische Matrix angegeben werden. Man kann ξ , bzw. ξ^* mit einer Matrix abbilden.

Damit die Produkte $C \xi$ oder $\xi^* C$ einen Sinn haben, wie auch $\xi \xi^*$ und $\xi^* \xi$, muss ξ zwei Zeilen und ξ^* zwei Spalten haben, und ξ^* muss gleich viel Zeilen haben wie ξ Spalten hat. Damit vier reelle Koeffizienten (etwa a, b, c, d) in ξ enthalten sind, liegt folgender Ansatz nahe:

$$\xi = \begin{vmatrix} a + ib \\ c + id \end{vmatrix}; \quad (13)$$

dann sind Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in

$$\xi^* = \|\alpha + i\beta \quad \gamma + i\delta\|$$

zu finden derart, dass ξ^* die gewünschten Eigenschaften besitzt. Wählen wir die möglichen Matrizen

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \Gamma_1, \quad \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = \Gamma_2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \Gamma_3,$$

so muss in $X^i = x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2 + x_3 \Gamma_3$ (x_1, x_2, x_3 : reell):

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2.$$

Damit $\xi_s \xi_s^* = X^i$ (wo ξ_s in der Form (13) ausgedrückt wird), müssen gewisse Beziehungen bestehen, aus welchen folgt, dass

$$a^2 + b^2 = d^2 + c^2. \quad (14)$$

Normiert man, wie dies möglich ist, wie folgt: $\alpha = a$, so wird

$$\alpha = a, \beta = -b, \gamma = -c, \delta = d.$$

Folgende Gleichungen bleiben dann übrig:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= x_3 = c^2 + d^2 \\ ac + bd &= -x_1, \quad ad - bc = x_2. \end{aligned}$$

Schreiben wir nun

$$\xi = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} \xi_1 &= a + ib, \\ \xi_2 &= c + id, \end{aligned}$$

so folgt

$$\frac{\xi_1^2}{x_1 + ix_2} = \frac{\xi_2^2}{x_1 - ix_2} = -\frac{\xi_1 \xi_2}{x_3}. \quad (15)$$

Vergleicht man Formel (15) mit der Cartan'schen Darstellung der Spinoren⁴⁾, so sieht man, dass ξ ein Spinor ist, und

$$\xi^* = \|\bar{\xi}_1 \quad \bar{\xi}_2\|.$$

Die Bedingung (14), die dafür sorgt, dass ξ , einfach ist, lässt sich wie folgt schreiben:

$$\xi_1 \bar{\xi}_1 = \xi_2 \bar{\xi}_2.$$

Die Theorie der Zahlen ξ liesse sich weiter entwickeln.

Schlussbemerkung. — Die bekannten Pauli'schen Arbeiten und die Dirac'sche Gleichung sind es, welche die Einführung der Spinoren in die Physik gefördert haben. Sobald die Spinoren dem Physiker bekannt wurden, wurde ihr Verhalten mit geometrischen Methoden in vielen Einzelheiten studiert. Jedoch scheint uns, abgesehen von dem physikalischen Grund (Spin und relativistische Forderungen) der mathematische Grund für ihre Einführung in die Quantenmechanik viel klarer aus den Riesz'schen algebraischen Betrachtungen, die in Teil I besprochen worden sind, als aus geometrischen Betrachtungen hervorzutreten. Natürlich kann untersucht werden, was mit den Eigenschaften, wie dem Spin, bei Drehungen und Spiegelungen vor sich geht; dem entspricht die Methode von Teil II. Sowohl die Pauli'sche als auch die Dirac'sche Theorie lässt sich mit Hilfe der Clifford'schen Zahlen untersuchen. Im Teil II. ist dies nach geometrischer Art für den Pauli'schen Fall, im Teil I nach algebraischer Art für den Dirac'schen Fall geschehen. Aus den Betrachtungen von Teil II geht besonders hervor, dass den Spinoren eine Transformationsformel entspricht, die aus derjenigen der Clifford'schen Zahlen durch eine Art Spaltung gewonnen wird.

Aber in den geometrischen Beziehungen tritt die Notwendigkeit der Einführung der Spinoren nicht so klar hervor, denn von vornherein wäre der Gebrauch der Clifford'schen Zahlen gleich so berechtigt wie derjenige der Spinoren, um die Zustände von quantenmechanischen Systemen darzustellen, was zuerst von PROCA⁵⁾ bemerkt wurde. (Dies gab zu mehreren Untersuchungen Anlass^{6) 1) 7) 3)}.) Wir suchten damals schon³⁾, von der Geometrie Abstand zu nehmen; dies ist aber wirklich von RIESZ viel besser getan worden. Im übrigen ist die Existenz der Zahlen ξ erst dann gesichert, wenn z. B. Matrizen zu ihrer Darstellung gefunden werden können, wie wir solche angegeben haben. Nach der Methode des I. Teils waren solche Betrachtungen belanglos, da die Spinoren als spezielle Clifford'sche Zahlen erscheinen, deren Existenz schon längst gesichert ist.

Zusammenfassend sei der mathematische Standpunkt vertreten, dass die Spinoren am besten als Elemente eines Links-, bzw. eines Rechtsideals der Clifford'schen Zahlen bezeichnet werden.

Seminar für theoretische Physik der Universität Bern.

Bibliographie.

- 1) G. JUVET et A. SCHIDLOF, Bull. Soc. neuchâteloise Sc. nat. **57**, 127, 1932.
- 2) A. MERCIER, Arch. Sc. phys. et nat. **17**, 305, 1935.
- 3) A. MERCIER, C. R. **201**, 1320, 1935 und **204**, 1148, 1937.
- 4) E. CARTAN, Leçons sur la théorie des spineurs, t. I et II (Paris 1938).
- 5) A. PROCA, C. R. **190**, 1937 und **191**, 26, 1930, und J. de Phys. VII, **1**, 236, 1930.
- 6) G. JUVET, Comm. Math. Helv. **2**, 225, 1930.
- 7) W. FRANZ, Sitzungsber. d. Bayerischen Akad. d. Wiss. 2. Nov. 1935. Dort sind weitere Arbeiten von Sauter usw. erwähnt.