Sur les feuilletages de l'espace projectif ayant une composante de Kupka

Autor(en): **Brunella, Marco**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **55 (2009)**

Heft 3-4

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110103

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 55 (2009), 227–234

SUR LES FEUILLETAGES DE L'ESPACE PROJECTIF AYANT UNE COMPOSANTE DE KUPKA

par Marco BRUNELLA

1. INTRODUCTION

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe (singulier) de codimension 1 de l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^n$, $n \geq 3$. Une composante connexe K de l'ensemble singulier $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ est une *composante de Kupka* ([GL], [CL], [C1]) si au voisinage de tout point $p \in K$ le feuilletage $\mathcal{F}$ est engendré par une 1-forme holomorphe ω telle que

$$\omega_p = 0 \qquad \text{et} \qquad d\omega_p \neq 0\,.$$

Une telle composante est nécessairement lisse et de codimension 2 dans $\mathbf{C}P^n$, et le long de K le feuilletage a une structure de produit local : on peut recouvrir un voisinage de K par des cartes $U_j \simeq \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{n-2}$ dans lesquelles $\mathcal{F}$ a la forme $\mathcal{F}_0 \times \mathbf{D}^{n-2}$, où $\mathcal{F}_0$ est un feuilletage de $\mathbf{D}^2$ (indépendant de j) appelé *type transverse* de K. D'après [GL], et en utilisant la positivité du fibré normal de K dans $\mathbf{C}P^n$, on sait que ce type transverse est donné par l'équation

$$pw\,dz - qz\,dw = 0$$

avec p et q des entiers positifs, premiers entre eux. Si $p = q = 1$, on dit que K est une composante de Kupka *radiale*.

Les feuilletages ayant une composante de Kupka *non* radiale ont été classifiés dans [CL] et [C1] : la composante K est nécessairement une intersection complète, $K = \{F = G = 0\}$, et le feuilletage $\mathcal{F}$ est le pinceau d'hypersurfaces algébriques $\{F^p/G^q = c\}$, d'équation $pG\,dF - qF\,dG = 0$, pour certains entiers positifs p, q (et $pq \geq 2$). Récemment, Calvo-Andrade a montré que le même résultat subsiste pour une composante de Kupka radiale (sauf que $p = q = 1$).

THÉORÈME 1 ([C2]). *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 de $\mathbf{C}P^n$, $n \geq 3$, ayant une composante de Kupka radiale K. Alors K est une intersection complète, $K = \{F = G = 0\}$, et $\mathcal{F}$ est le pinceau d'hypersurfaces algébriques $G\,dF - F\,dG = 0$.*

La preuve de [C2] est relativement sophistiquée : il s'agit principalement de montrer que K est une intersection complète (la deuxième conclusion du théorème, sur la structure de $\mathcal{F}$, est alors prouvée dans [CL]), et pour ce faire on s'appuie sur plusieurs résultats concernant la stabilité et la décomposabilité des fibrés vectoriels sur les espaces projectifs.

Nous allons donner dans cet article une preuve alternative du théorème 1 ci-dessus, basée sur des considérations de structures projectives transverses (voir §2 pour des rappels). En fait, notre résultat principal n'a (presque) rien à voir avec les composantes de Kupka, c'est plutôt un critère général pour passer d'une structure projective transverse (locale) à une intégrale première méromorphe (globale).

THÉORÈME 2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 de $\mathbf{C}P^n$. Soit $C \subset \mathbf{C}P^n$ une courbe algébrique disjointe de $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Supposons que dans un voisinage de C le feuilletage $\mathcal{F}$ admette une structure projective transverse. Alors $\mathcal{F}$ admet, dans $\mathbf{C}P^n$, une intégrale première rationnelle.*

Voici comment déduire le théorème 1 du théorème 2. Si K est une composante de Kupka radiale, on peut recouvrir un voisinage U de K par des ouverts $U_j \simeq \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^{n-2}$ où $\mathcal{F}$ est donné par les niveaux de la fonction méromorphe $f_j = z/w$ (où z, w sont les coordonnées sur $\mathbf{D}^2$). Sur $U_j \cap U_k$ on a clairement $f_j = \varphi_{jk} \circ f_k$, pour un certain $\varphi_{jk} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}P^1)$, donc $\mathcal{F}|_{U \setminus K}$ admet une structure projective transverse (voir §2). L'ouvert $U \setminus K$ contient une courbe algébrique : il suffit de prendre une courbe algébrique dans K et de la déformer un peu, de manière à la rendre disjointe de K. Le théorème 2 fournit donc une intégrale première rationnelle pour $\mathcal{F}$, ce qui donne facilement la conclusion du théorème 1.

Avec un petit effort supplémentaire, on peut aussi traiter le cas d'une composante de Kupka non radiale, de type transverse $pw\,dz - qz\,dw = 0$, et donc réobtenir la classification de [CL] et [C1]. La seule différence est que les fonctions f_j ci-dessus doivent être remplacées par des fonctions de la forme z^p/w^q, qui ne sont plus des submersions (hors de K) mais qui ont une ramification le long des axes. Toutefois, les difféomorphismes φ_{jk} restent des automorphismes projectifs. Le feuilletage $\mathcal{F}|_{U \setminus K}$ n'est plus transversalement

projectif *stricto sensu*, mais les arguments que nous utiliserons dans la suite s'adaptent sans aucun problème à une telle situation « ramifiée » et produisent une intégrale première rationnelle même dans ce cas.

Signalons que plusieurs généralisations sont possibles, en remplaçant $\mathbf{C}P^n$ par d'autres variétés ; voir la fin de cet article. Par ailleurs, même notre énoncé du théorème 1 semble plus fort que le résultat de [C2], car dans [C2] on fait en plus l'hypothèse que la composante de Kupka K soit *la seule* composante irréductible de codimension 2 de $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$.

Cet article a été réalisé pendant un séjour à l'IMPA de Rio de Janeiro, que je remercie pour l'hospitalité.

2. Structures projectives transverses

Commençons par rappeler deux ou trois faits basiques sur les feuilletages transversalement projectifs, en suivant [Go, III] ; voir aussi [Sc] et [LP], où l'on trouve des généralisations « singulières » bien adaptées au cadre holomorphe (mais nous n'aurons pas vraiment besoin de ces généralisations).

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe, de codimension 1, sur une variété complexe X. Soit $U \subset X$ un ouvert disjoint de $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. On dit que $\mathcal{F}|_U$ admet une *structure projective transverse* s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_j\}_{j\in I}$ de U tel que :

(1) pour chaque $j \in I$, $\mathcal{F}|_{U_j}$ est donné par les niveaux d'une submersion holomorphe
$$f_j \colon U_j \to \mathbf{C}P^1 ;$$

(2) pour chaque $j,k \in I$, il existe un automorphisme $\varphi_{jk} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}P^1)$ tel que
$$f_j = \varphi_{jk} \circ f_k \quad \text{sur } U_j \cap U_k .$$

En recollant les fonctions f_j à l'aide du cocycle φ_{jk} on peut alors construire une *application développante*

$$D \colon \widetilde{U} \longrightarrow \mathbf{C}P^1 ,$$

où $\widetilde{U} \xrightarrow{\pi} U$ est un revêtement galoisien, telle que le feuilletage relevé $\pi^*(\mathcal{F})$ coïncide avec le feuilletage donné par les fibres de D. En particulier, si U est *simplement connexe* alors forcément $\pi = id$ et donc $\mathcal{F}|_U$ admet l'*intégrale première* D (qui est, bien sûr, une fonction méromorphe sur U).

Un cas spécial de structure projective transverse s'obtient de la façon suivante. Supposons que $\mathcal{F}|_U$ soit engendré par une 1-forme holomorphe ω, partout non nulle, et supposons qu'il existe deux 1-formes holomorphes η et ξ sur U telles que

$$d\omega = \eta \wedge \omega$$
$$d\eta = \omega \wedge \xi$$
$$d\xi = \xi \wedge \eta .$$

Alors $\mathcal{F}|_U$ admet une structure projective transverse. Ceci résulte de la proposition suivante, attribuée à Darboux dans [Go, III.3.11, III.3.20]. Voir aussi [Sc, §II.1] et [LP, §2].

PROPOSITION 1 (Darboux). *Étant donné (ω, η, ξ) comme ci-dessus, on peut trouver au voisinage de chaque point de U des fonctions holomorphes (f, g, h) telles que :*

$$\omega = -g\, df$$
$$\eta = \frac{dg}{g} - h\,\omega$$
$$\xi = \frac{1}{2}h^2\omega + h\,\eta + dh .$$

Si (f', g', h') est un autre triple satisfaisant les mêmes relations, alors $f' = \varphi \circ f$ pour un certain automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}P^1)$.

En utilisant les fonctions locales f ainsi construites (qui sont des submersions, car ω est partout non nulle) on obtient donc une structure projective transverse pour $\mathcal{F}|_U$.

La réciproque de cette construction n'est pas toujours possible, puisque, en général, il n'y a aucune raison pour que le feuilletage soit engendré par une 1-forme *holomorphe*. On peut toutefois remplacer holomorphe par méromorphe, et on a alors la réciproque partielle suivante, qu'on trouve explicitement dans [Sc, §II.1]. Voir aussi [Go, III.3.16] et [LP, §2]. Nous en donnons la preuve, qui est instructive.

PROPOSITION 2. *Supposons que $\mathcal{F}|_U$ admette une structure projective transverse. Supposons aussi qu'il existe deux 1-formes méromorphes ω et η sur U telles que $\mathcal{F} = \ker(\omega)$ (aux points génériques de U, où ω est holomorphe non nulle) et $d\omega = \eta \wedge \omega$. Alors il existe une troisième 1-forme méromorphe ξ sur U telle que $d\eta = \omega \wedge \xi$ et $d\xi = \xi \wedge \eta$.*

Démonstration. Soient $\{U_j, f_j, \varphi_{jk}\}$ donnant la structure projective transverse. Puisque $\ker(\omega) = \mathcal{F}$, on a nécessairement

$$\omega|_{U_j} = -g_j\, df_j$$

pour une certaine fonction méromorphe g_j sur U_j, et puisque $d\omega = \eta \wedge \omega$ on a, tout aussi nécessairement,

$$\eta|_{U_j} = \frac{dg_j}{g_j} - h_j\,\omega$$

pour une autre fonction méromorphe h_j.

Posons :

$$\xi_j = \frac{1}{2}h_j^2\omega + h_j\,\eta + dh_j\,.$$

De $f_j = \varphi_{jk}(f_k)$ et $g_j\,df_j = g_k\,df_k$ (sur $U_j \cap U_k$) on déduit $g_j\,\varphi'_{jk}(f_k) = g_k$ et donc

$$\frac{dg_j}{g_j} = \frac{dg_k}{g_k} - \psi_{jk}(f_k)\,df_k\,,$$

où l'on a posé

$$\psi_{jk} = \varphi''_{jk}/\varphi'_{jk}\,.$$

De $\frac{dg_j}{g_j} - h_j\,\omega = \frac{dg_k}{g_k} - h_k\omega$ on déduit alors

$$h_j = h_k + \frac{1}{g_k}\,\psi_{jk}(f_k)\,.$$

Si l'on substitue ces identités dans les expressions de ξ_j et ξ_k on obtient enfin

$$\xi_j = \xi_k + \frac{1}{g_k}\left[\psi'_{jk}(f_k) - \frac{1}{2}\psi_{jk}(f_k)^2\right] df_k\,.$$

Mais $\psi'_{jk} - \frac{1}{2}\psi_{jk}^2$ n'est rien d'autre que la dérivée schwarzienne de φ_{jk}, qui est nulle car $\varphi_{jk} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}P^1)$. Les 1-formes méromorphes $\{\xi_j\}$ se recollent donc en donnant une 1-forme méromorphe ξ sur U.

Il est ensuite immédiat de vérifier que cette 1-forme ξ satisfait les relations $d\eta = \omega \wedge \xi$ et $d\xi = \xi \wedge \eta$.

REMARQUE 1. C'est le même calcul (à l'envers) qui donne la deuxième partie de la proposition 1, car la nullité de la dérivée schwarzienne est une condition non seulement nécessaire mais aussi suffisante pour qu'un difféomorphisme soit projectif.

3. Des structures projectives aux intégrales premières

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbf{C}P^n$, ayant une structure projective transverse sur un voisinage U d'une courbe algébrique $C \subset \mathbf{C}P^n \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, donnée par des submersions

$$f_j \colon U_j \to \mathbf{C}P^1 .$$

On peut bien sûr construire une 1-forme méromorphe ω sur $\mathbf{C}P^n$ telle que $\ker(\omega) = \mathcal{F}$, et aussi une 1-forme méromorphe η sur $\mathbf{C}P^n$ telle que $d\omega = \eta \wedge \omega$ (la première affirmation résulte de $h^0(\mathbf{C}P^n, \mathcal{M} \otimes N_{\mathcal{F}}^*) > 0$, et la deuxième de $h^1(\mathbf{C}P^n, \mathcal{M} \otimes N_{\mathcal{F}}^*) = 0$).

La proposition 2 fournit donc une 1-forme méromorphe ξ sur U telle que $d\eta = \omega \wedge \xi$ et $d\xi = \xi \wedge \eta$. Des résultats classiques ([Ba], [Ro]) permettent de prolonger (méromorphiquement) cette 1-forme ξ à tout l'espace $\mathbf{C}P^n$.

Soit $H \subset \mathbf{C}P^n$ le sous-ensemble analytique constitué par les pôles de ω, η, ξ et les zéros de ω. Soit

$$V = \mathbf{C}P^n \setminus H .$$

D'après la proposition 1, $\mathcal{F}|_V$ admet une structure projective transverse; on notera

$$f_\alpha \colon V_\alpha \to \mathbf{C}P^1$$

les submersions correspondant à cette structure.

Prenons $p \in U_j \cap V_\alpha$. Au voisinage de p, le triple (ω, η, ξ) admet deux écritures comme dans l'énoncé de la proposition 1, une par rapport à l'indice α et l'autre par rapport à j (voir la preuve de la proposition 2, où l'on construit explicitement ξ à partir de f_j, ω et η). Donc, d'après la proposition 1, les deux submersions f_α et f_j sont reliées par un automorphisme projectif. On en conclut que les deux structures projectives transverses sur V et sur U sont compatibles, c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}|_{U \cup V} \textit{ admet une structure projective transverse.}$$

La clé de la preuve réside alors dans l'observation suivante.

Lemme 1. *$U \cup V$ est simplement connexe.*

Démonstration. Soit $\gamma \subset U \cup V$ un lacet fermé. Dans $\mathbf{C}P^n$, γ est le bord d'un disque (réel) Γ. On peut supposer que Γ rencontre H, transversalement, en un nombre fini de points, tous appartenant aux strates lisses et de codimension 1 de H. Or, chaque composante irréductible de codimension 1

de H rencontre la courbe C, et donc U. On peut alors faire glisser ces points d'intersection dans U. On en déduit une déformation de Γ vers un autre disque Γ', de bord γ, tel que $\Gamma' \cap H \subset U$, et par conséquent $\Gamma' \subset U \cup V$. On voit donc que $U \cup V$ est simplement connexe.

En utilisant l'application développante associée à la structure projective transverse, on conclut, grâce à ce lemme, que $\mathcal{F}|_{U\cup V}$ admet une intégrale première méromorphe. Cette intégrale se prolonge à $\mathbf{C}P^n$, à nouveau par [Ba] ou [Ro]. La preuve du théorème 2 est ainsi terminée.

REMARQUE 2. Les seules propriétés de $\mathbf{C}P^n$ qu'on a utilisées sont les suivantes :

(1) simple connexité ;

(2) toute hypersurface algébrique rencontre C ;

(3) prolongement des fonction méromorphes définies au voisinage de C.

Les deux premières propriétés sont satisfaites, par exemple, par les hypersurfaces ou les intersections complètes de $\mathbf{C}P^m$, de dimension au moins 3 (Lefschetz). La troisième propriété est intimement liée à la positivité du fibré normal de C : en utilisant la même méthode que [Ba], on peut montrer qu'elle est satisfaite dès que ce fibré normal est ample et que (1) et (2) sont remplies.

REMARQUE 3. Le rapporteur nous a signalé que l'article [Ce] contient un résultat (proposition 2.15) dont la preuve pourrait être comparée aux arguments que nous utilisons pour démontrer le théorème 2 : là aussi on construit une intégrale première méromorphe en prolongeant une structure projective transverse sur un ouvert simplement connexe.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] BARTH, W. Fortsetzung meromorpher Funktionen in Tori und komplex-projektiven Räumen. *Invent. Math. 5* (1968), 42–62.

[C1] CALVO-ANDRADE, O. Foliations with a Kupka component on algebraic manifolds. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 30* (1999), 183–197.

[C2] —— Foliations with a radial Kupka set on projective spaces. Prépublication (2008).

[CL] CERVEAU, D. and A. LINS NETO. Codimension one foliations in $\mathbf{C}P^n$, $n \geq 3$, with Kupka components. In: *Complex Analytic Methods in Dynamical Systems* (Rio de Janeiro, 1992). *Astérisque 222* (1994), 93–133.

[Ce] CERVEAU, D., A. LINS NETO, F. LORAY, J. V. PEREIRA and F. TOUZET. Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences. *Moscow Math. J. 7* (2007), 21–54.

[Go] GODBILLON, C. *Feuilletages. Études géométriques*. Progress in Mathematics *98*. Birkhäuser, Basel, 1991.

[GL] GÓMEZ-MONT, X. and A. LINS NETO. Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral. *Topology 30* (1991), 315–334.

[LP] LORAY, F. and J. V. PEREIRA. Transversely projective foliations on surfaces: existence of minimal form and prescription of monodromy. *Internat. J. Math. 18* (2007), 723–747.

[Ro] ROSSI, H. Continuation of subvarieties of projective varieties. *Amer. J. Math. 91* (1969), 565–575.

[Sc] SCÁRDUA, B. A. Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30* (1997), 169–204.

(Reçu le 8 août 2008)

Marco Brunella

IMB – UMR 5584
9, avenue Savary
F-21078 Dijon
France
e-mail : Marco.Brunella@u-bourgogne.fr