Preuve. On suppose d'abord X hyperbolique. Pour a dans X on choisit une boule fermée B pour la métrique de Kobayashi centrée en a et de rayon $2r > 0$ choisi assez petit pour que cette boule soit compacte. (Ceci est possible car la métrique de Kobayashi induit la topologie [10].) On peut alors choisir pour V la boule fermée de centre a et de rayon r pour la métrique de Kobayashi. En effet d'après la propriété de contraction de la métrique de Kobayashi, il existe $r' > 0$ tel que pour toute application holomorphe $f \colon D_1 \to X$ vérifiant $f(0) \in V$, on ait : $f(D_{r'}) \subset B$. Comme B est compact, un argument de normalité permet de montrer l'existence de M.

La réciproque est plus difficile. On suppose la propriété (P) vérifiée pour X. En chaque point p, on définit l'indicatrice K_p de Kobayashi comme étant le sous-ensemble de l'espace tangent T_p formé des éléments $rf'(0)$ avec $0 < r < 1$ avec f application holomorphe de D_1 dans X vérifiant $f(0) = p$. A cette indicatrice, on associe de manière classique une jauge j_p définie sur T_p par : $j_p(v) = \inf\{t > 0 \mid v/t \in K_p\}$. La propriété (P) signifie alors simplement que pour tout point a, il existe un voisinage V de a et $c > 0$ tel que pour tout $p \in V$ et $x \in T_p$, on a : $j_p(x) \geq c|x|$. On conclut en utilisant le fait que la métrique de Kobayashi est la métrique intégrée par rapport aux j_p (voir [10] pour une preuve de ce théorème assez difficile).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AXLER, S., P. BOURDON and W. RAMEY. *Harmonic Function Theory.* Graduate Texts in Mathematics *137*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] BARTH, T. J. Convex domains and Kobayashi hyperbolicity. *Proc. Amer. Math. Soc. 79* (1980), 556–558.

[3] BERTELOOT, F. et J. DUVAL. Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires. *L'Enseignement Math. (2) 47* (2001), 253–267.

[4] BRODY, R. Compact manifolds and hyperbolicity. *Trans. Amer. Math. Soc. 235* (1978), 213–219.

[5] CHEN H., P. M. GAUTHIER and W. HENGARTNER. Bloch constants for planar harmonic mappings. *Proc. Amer. Math. Soc. 128* (2000), 3231–3240.

[6] COEURÉ, G. et J.-J. LOEB. Le théorème des tubes de Bochner pour les groupes de Lie. *Représentation des groupes et analyse complexe*, Luminy, 1986.

[7] GROMOV, M. Foliated Plateau problem, part II : harmonic maps of foliations. *Geom. Funct. Anal. 1* (1991), 253–320.

[8] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Several Complex Variables.* North Holland/American Elsevier, 1973.

[9] —— *The Analysis of Linear Partial Differential Equations I.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften *256*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[10] KOBAYASHI, S. *Hyperbolic Complex Spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften *318*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[11] MINDA, D. Another approach to Picard's theorem and a unifying principle in geometric function theory. In: *Current Topics in Analytic Function Theory*, 186–200. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.

[12] SCHIFF, J. L. *Normal Families*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[13] ZALCMAN, L. Normal families: new perspectives. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* *35* (1998), 215–230.

(Reçu le 14 juillet 2006; version révisée reçue le 31 mai 2007)

Jean-Jacques Loeb

Département de Mathématiques
Université d'Angers
2, Boulevard Lavoisier
49045 Angers cedex 01
France *e-mail:* Jean-Jacques.Loeb@univ-angers.fr