

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **52 (2006)**

Heft 1-2: **L'enseignement mathématique**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Consider the composite map

$$(10.2) \quad Z \hookrightarrow X \times \tilde{A} \rightarrow \tilde{A} \rightarrow V,$$

where the final step uses that  $\tilde{A}$  is constructed inside of  $\mathbf{P}_k^n \times V$ . The map (10.2) is dominant, since even  $W_P = Z_{x_0} \subseteq Z$  maps birationally onto  $V$ , so  $Z$  hits the generic point  $\eta \in V$  with fiber  $Z_\eta$  that must be integral and have dimension  $\dim Z - \dim V = 1$ . Thus, the proper map

$$Z \hookrightarrow X \times \tilde{A} \rightarrow X \times V$$

has restriction over  $X_K$  that is a proper map  $\xi: Z_\eta \rightarrow X_K$  between integral curves over  $K$ . Since  $X_K$  is a  $K$ -smooth curve,  $\xi$  is either constant or finite and flat. The fibers of  $\xi$  over the  $K$ -points  $\{x_0\} \times_{\text{Spec } k} K$  and  $\{x'_0\} \times_{\text{Spec } k} K$  of  $X_K$  are  $(Z_{x_0})_\eta = (W_P)_\eta$  and  $(Z_{x'_0})_\eta = (W_{P'})_\eta$ , and these are non-empty because  $W_P \rightarrow V$  and  $W_{P'} \rightarrow V$  are dominant (even birational) morphisms. Thus,  $\xi$  must be finite and flat. Since  $W_P \rightarrow V$  is birational, so  $(W_P)_\eta \rightarrow \eta$  is an isomorphism,  $\xi$  has degree 1 and thus is an isomorphism. It follows that for some dense open  $V^0 \subseteq V$ , the restriction of the composite  $Z \hookrightarrow X \times \tilde{A} \rightarrow X \times V$  over  $X \times V^0$  is an isomorphism.

Hence, we can consider  $Z|_{V^0}$  as a section  $\mathcal{P}_{V^0}: X_{V^0} \rightarrow X_{V^0} \times_{V^0} \tilde{A}_{V^0}$ . Restricting this over the generic point  $\eta$  of  $V^0$  and recalling that (by construction of  $\tilde{A}$ ) the map  $\tilde{A} \rightarrow V$  has generic fiber equal to the abelian variety  $A$  over  $\eta$ , we arrive at a section  $\mathcal{P}_K: X_K \rightarrow X_K \times A$  over  $X_K$  such that  $\mathcal{P}_K(\{x_0\}_K) \in A(K)$  is the  $K$ -point  $P$  that was used to define  $W_P$  via closure, and likewise  $\mathcal{P}_K(\{x'_0\}_K) \in A(K)$  is  $P'$ . It is therefore enough to prove that for *all*  $x \in X(k)$ , the points  $\mathcal{P}_K(x) \in A(K)$  coincide modulo  $\text{Tr}_{K/k}(A)(k)$ . The argument with Albanese varieties that we used to conclude the proof of the Lang-Néron theorem may now be carried over *verbatim* to prove this final claim.  $\square$

#### REFERENCES

- [1] BOSCH, S., W. LÜTKEBOHMERT and M. RAYNAUD. *Néron Models*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [2] CHAI, C-L. and G. FALTINGS. *Degeneration of Abelian Varieties*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [3] CHOW, W. L. Abelian varieties over function fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* 78 (1955), 253–275.
- [4] — On Abelian varieties over function fields. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 41 (1955), 582–586.

- [5] CONRAD, B., K. CONRAD and H. HELFGOTT. Root numbers and ranks in positive characteristic. *Adv. Math.* 198 (2005), 684–731.
- [6] DELIGNE, P. Théorèmes de finitude en cohomologie  $\ell$ -adique. In *Cohomologie étale. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2*. Lecture Notes in Mathematics 569, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [7] DIEUDONNÉ, J. and A. GROTHENDIECK. Éléments de géométrie algébrique. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960-7).
- [8] FONTAINE, J.-M. *Groupes  $p$ -divisibles sur les corps locaux*. Astérisque 47–48, Soc. Math. France, 1977.
- [9] FRIETAG, E. and R. KIEHL. *Étale Cohomology and the Weil Conjectures*. Ergebnisse der Math. 13, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [10] GROTHENDIECK, A. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki* 6, exp. 221, 249–276.
- [11] ———. *Séminaire de géométrie algébrique* 1. Paris, 1961.
- [12] ———. *Séminaire de géométrie algébrique* 3. Paris, 1963/4.
- [13] HINDRY, M., A. PACHECO and R. WAZIR. Fibrations et conjecture de Tate. *J. Number Theory* 112 (2005), 345–368.
- [14] HINDRY, M. and J. SILVERMAN. *Diophantine Geometry*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [15] KAHN, B. Sur le groupe des classes d'un schéma arithmétique. To appear in *Bull. Soc. Math. France*.
- [16] KATZ, N. and B. MAZUR. *Arithmetic Moduli of Elliptic Curves*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.
- [17] KLEIMAN, S. Les théorèmes de finitude pour le foncteur de Picard. Exp. XIII in *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* (SGA6). Lecture Notes in Mathematics 225, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [18] LANG, S. *Abelian Varieties*. Interscience tracts 7, Interscience, New York, 1958.
- [19] LANG, S. and A. NÉRON. Rational points of abelian varieties over function fields. *Amer. J. Math.* 81 (1959), 95–118.
- [20] LANG, S. *Fundamentals of Diophantine Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [21] MATSUMURA, H. *Commutative Algebra*. (2nd ed.) Lecture Note Series 56, Benjamin/Cummings Publ. Co., Reading, Mass., 1980.
- [22] ———. *Commutative Ring Theory*. Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [23] MILNE, J. *Abelian Varieties*. In *Arithmetic Geometry* (Cornell/Silverman ed.), Springer-Verlag, New York, 1986.
- [24] MUMFORD, D. *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag, New York, 1965.
- [25] ———. *Abelian Varieties*. Oxford University Press, 1970.
- [26] NÉRON, A. Problèmes arithmétiques et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps. *Bull. Soc. Math. France* 80 (1952), 101–166.

- [27] OORT, F. The isogeny class of a CM-type abelian variety is defined over a finite extension of the prime field. *J. pure appl. algebra* 3 (1973), 399–408.
- [28] RAYNAUD, M. Caractéristique d’Euler-Poincaré d’un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes. In *Séminaire Bourbaki* 9, exp. 286, 129–147.
- [29] SHIODA, T. Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve. In: *New Trends in Algebraic Geometry*. Selected papers presented at the Euro conference, Warwick, UK, July 1996. Cambridge Univ. Press, Lecture Note Series 264 (1999), 359–373.
- [30] SILVERMAN, J. Heights and the specialization map for families of abelian varieties. *J. reine angew. Math.* 342 (1983), 197–211.
- [31] ——— *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer-Verlag GTM 106, New York, 1986.
- [32] VERDIER, J.-L. A duality theorem in the étale cohomology of schemes. In *Proceedings of a Conference on Local Fields*. Springer-Verlag, New York, 1967, 184–198.
- [33] WATERHOUSE, W. *Introduction to Affine Group Schemes*. Springer-Verlag GTM 66, New York, 1979.
- [34] WEIL, A. *Foundations of Algebraic Geometry*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 29, New York, 1946.

(Reçu le 13 juin 2005)

Brian Conrad

Department of Mathematics  
University of Michigan  
Ann Arbor, MI 48109  
U. S. A.  
*e-mail*: bdconrad@umich.edu