7. Endomorphismes irréductibles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

où M est une matrice triangulaire supérieure de déterminant 1,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Là encore, l'argument sur les classes de Chern permet de conclure que la représentation est triviale: les matrices M diagonales sont dans le noyau et le sous-groupe distingué qu'elles engendrent coïncide avec le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Nous avons donc montré dans tous les cas que la représentation de P était triviale, ce qui assure que X est un produit. Le théorème est démontré.

EXEMPLE 6.1. Pour les surfaces de Hopf (voir l'exemple 5.1), le revêtement universel coïncide avec le fibré tautologique de $\mathbf{P}^1$ (de fibre $\mathbf{C}^*$ et de classe de Chern -1). Cette surface n'a donc aucun endomorphisme non injectif qui soit de degré 1 dans les fibres. Nous pourrions le montrer directement en travaillant sur le revêtement universel $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$.

6.4 APPLICATION

Pour démontrer le théorème 1.1, il suffit maintenant de juxtaposer le paragraphe 6.2, la proposition 6.2 et le théorème de Paranjape et Srinivas: si f est un endomorphisme sans facteur inversible, la base de la fibration de Tits doit être un produit d'espaces projectifs et f induit un produit d'endomorphismes non inversibles, donc la fibre est une nilvariété.

REMARQUE 6.1. Certains endomorphismes de la base $\Pi_i \mathbf{P}^{m_i}$ ne se relèvent pas en des endomorphismes de X, même si la fibre de Tits est une nilvariété. Si l'on suppose que la fibre F est un quotient d'un groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_n$, une condition nécessaire et suffisante est que les endomorphismes $f_i \colon \mathbf{P}^{m_i} \to \mathbf{P}^{m_i}$ aient tous même degré pour les indices i tels que la suspension de F au-dessus de $\mathbf{P}^{m_i}$ est non triviale. Ce résultat peut être obtenu en utilisant les arguments présentés au cours des exemples 5.2 et 5.3. Nous le laissons en exercice.

7. ENDOMORPHISMES IRRÉDUCTIBLES

Dans [10], J.-Y. Briend et J. Duval montrent que les endomorphismes non inversibles de l'espace projectif possèdent tous une unique mesure de probabilité invariante d'entropie maximale. De plus, cette mesure coïncide avec la limite, lorsque k tend vers l'infini, des mesures de moyenne sur les points périodiques de période inférieure à k. Il s'agit d'un résultat particulièrement frappant. De surcroît, il n'est pas nécessaire de supposer que la variété ambiante M soit un espace projectif pour employer la méthode mise en œuvre par Briend et Duval. Les hypothèses essentielles sont que

(1) M soit projective (ou kählérienne)

(2) le degré topologique $\deg(f)$ de l'endomorphisme majore strictement les autres valeurs spectrales de la transformation linéaire

$$f_* \colon H_*(M;\mathbf{R}) \to H_*(M;\mathbf{R})$$

obtenue par l'action de f sur l'homologie de M.

Ces deux propriétés sont satisfaites par les endomorphismes de l'espace projectif et par les endomorphismes (affines) des tores dont la partie linéaire est une similitude. La question est : existe-t-il d'autres exemples ? Nous cherchons donc en priorité à décrire les endomorphismes qui ne préservent pas de fibration non triviale.

Nous ne supposerons plus que la variété étudiée est homogène, mais qu'elle est kählérienne et que sa dimension de Kodaira est positive ou nulle (*cf.* §2).

PROPOSITION 7.1. *Soit M une variété kählérienne compacte de dimension n dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Soit $f \colon M \to M$ un endomorphisme dont le degré topologique $\deg(f)$ est strictement plus grand que 1. Si $\deg(f)$ n'appartient pas au spectre de $f_* \colon H_{n-1,n-1}(M,\mathbf{R}) \to H_{n-1,n-1}(M,\mathbf{R})$ alors, après un revêtement étale fini de M, ou bien M est un tore, ou bien f a un facteur inversible (voir la définition 1.1).*

Ce résultat montre que pour trouver de nouveaux endomorphismes redevables de la méthode Briend-Duval il faut chercher parmi les variétés de dimension de Kodaira négative. A priori, on peut d'ailleurs se contenter d'étudier celles qui sont rationnellement connexes (voir [12]).

Démonstration. D'après le théorème 2.2, f est un revêtement étale de M. Soit k un entier strictement positif pour lequel $K_M^{\otimes k}$ possède une section non identiquement nulle. Puisque l'espace des sections holomorphes de $K_M^{\otimes k}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, il existe une section Ω de $K_M^{\otimes k}$ et un nombre complexe non nul α tel que

$$f^*\Omega = \alpha\,\Omega\,. \tag{31}$$

En particulier, le diviseur des zéros de Ω est invariant à la fois par f et par f^{-1} ; au niveau homologique, ceci se traduit par l'équation

$$f_*[(\Omega)_0] = \deg(f)\,[(\Omega)_0]\,. \tag{32}$$

L'hypothèse faite dans l'énoncé montre alors que $[(\Omega)_0]$ est nulle; la forme Ω ne s'annule donc pas et le fibré en droites K_M est un fibré de torsion ($K_M^{\otimes k}$ est trivial).

D'après un théorème célèbre de Fedor A. Bogomolov (voir [7], partie I), la variété M possède un revètement fini M' qui est le produit d'un tore A par une variété simplement connexe Q. La projection sur A coïncide avec le morphisme d'Albanese et détermine donc une fibration f-équivariante. La variété Q est simplement connexe et sa dimension de Kodaira est nulle, donc tout endomorphisme de Q est un automorphisme (*cf.* thm. 2.2); en outre, le groupe des automorphismes de Q est discret [7]. L'argument donné pour démontrer la proposition 3.3 montre alors que f agit diagonalement sur le produit $M' = A \times Q$ et que la projection de M' sur Q fournit un facteur inversible de f.

REMARQUE 7.1. Nous pensons que l'hypothèse reliant le degré de f au spectre de f_* n'est pas essentielle. En effet, supposons que la dimension de Kodaira de M est nulle, car sinon on peut réduire le problème à l'aide du théorème 2.1. Si f ne préserve aucune fibration, nous pouvons supposer que la fibration d'Albanese de M est triviale (*cf.* §2.3). Dans ce cas, Frédéric Campana conjecture que le groupe fondamental de M est fini. Le revêtement universel de M serait alors une variété complexe compacte simplement connexe dont la dimension de Kodaira est nulle: tous ses endomorphismes sont donc des automorphismes (*cf.* les arguments relatifs à Q ci-dessus).

PROPOSITION 7.2. *Soit $f\colon M \to M$ un endomorphisme non inversible d'une variété kählérienne compacte. Supposons que la dimension de Kodaira de M est positive ou nulle et qu'il existe une classe de cohomologie kählérienne $[\alpha]$ telle que $f^*[\alpha]$ soit proportionnelle à $[\alpha]$. Il existe alors un revêtement fini de M qui est un tore.*

Démonstration. Notons q le nombre réel positif tel que

$$f^*[\alpha] = q[\alpha]\,. \tag{33}$$

J.-P. Serre a montré dans [26] que les valeurs propres de f^* sur chaque groupe de cohomologie $H^{p,p}(M;\mathbf{C})$ sont de module q^p. Le degré topologique de f est égal à q^n où n est la dimension de M : nous sommes donc dans le cadre de la proposition précédente, dont nous poursuivons la démonstration avec les mêmes notations. Notons au passage que q est strictement plus grand que

1 car f n'est pas inversible. Soit a un point de la variété d'Albanese A de M' et Q_a la fibre du produit $M' = A \times Q$ au-dessus de a. Puisque f agit par automorphisme sur Q, $f^{-1}(Q_a)$ est constitué d'exactement q^n fibres. Celles-ci sont toutes homologues à Q_a et, M' étant kählérienne, la classe d'homologie $[Q]$ n'est pas nulle. Puisque la valeur propre q^n n'apparaît pas sur les homologies de dimension intermédiaire, ceci montre que Q est réduite à un point. Autrement dit, M' est un tore.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKHIEZER, D. N. Homogeneous complex manifolds. In: *Several Complex Variables IV. Encyclopaedia Math. Sci. 10*, 195–244. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[2] —— *Lie Group Actions in Complex Analysis.* Vieweg, Braunschweig, 1995.

[3] AMERIK, E. Maps onto certain Fano threefolds. *Doc. Math. 2* (1997), 195–211.

[4] —— On a problem of Noether-Lefschetz type. *Compositio Math. 112* (1998), 255–271.

[5] —— On endomorphisms of projective bundles. *Manuscripta Math. 111* (2003), 17–28.

[6] AMERIK, E., M. ROVINSKY and A. VAN DE VEN. A boundedness theorem for morphisms between threefolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49* (1999), 405–415.

[7] BEAUVILLE, A. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom. 18* (1984), 755–782.

[8] —— Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. *Internat. Math. Res. Notices 1* (2001), 53–58.

[9] BOREL, A. und R. REMMERT. Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann. 145* (1961/1962), 429–439.

[10] BRIEND, J.-Y. et J. DUVAL. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 93* (2001), 145–159.

[11] CALABI, E. and B. ECKMANN. A class of compact, complex manifolds which are not algebraic. *Ann. of Math. (2) 58* (1953), 494–500.

[12] DEBARRE, O. *Higher-Dimensional Algebraic Geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[13] GRIFFITHS, PH. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry.* 2nd ed. Wiley, New York, 1994.

[14] GROMOV, M. On the entropy of holomorphic maps. (Manuscrit, 1980.) *L'Enseignement Math. (2) 49* (2003), 217–231.

[15] HUCKLEBERRY, A. T. Complex homogeneous manifolds. In: *Several Complex Variables VI. Encyclopaedia Math. Sci. 69*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[16] KNAPP, A. W. *Lie Groups Beyond an Introduction.* Progress in Mathematics 140, 2nd ed. Birkhäuser, Boston, 2002.