3.3 Cas général

REMARQUE 3.1. La preuve que nous venons de présenter simplifie légèrement les arguments de [22] et a l'avantage d'employer peu d'outils évolués. La stratégie s'applique pour toutes les variétés de drapeaux classiques – *i.e.* pour les ensembles de sous-espaces vectoriels emboîtés de $\mathbf{C}^n$. Par contre, elle ne s'applique pas pour la quadrique lisse de dimension 3. Pour une preuve dans le cas général, nous renvoyons le lecteur à [22]; le cas des quadriques apparaît également dans [4].

3.3 CAS GÉNÉRAL

D'après un théorème d'Armand Borel et Reinhold Remmert, toutes les variétés homogènes kählériennes compactes sont isomorphes au produit d'un tore T par une variété de drapeaux Q. Puisque la projection de $T \times Q$ sur T coïncide avec le morphisme d'Albanese, ses fibres sont permutées par tout endomorphisme. Si $f\colon T \times Q \to T \times Q$ est une application holomorphe surjective, on peut donc l'écrire sous la forme

$$f(t,q) = (a(t), g_t(q)), \tag{10}$$

où a est un endomorphisme de T et $t \mapsto g_t$ est une application holomorphe à valeurs dans les endomorphismes de Q. Quitte à remplacer f par l'un de ses itérés, le théorème 3.1 et la connexité de T permettent de supposer que g_t est à valeurs dans:

(i) les endomorphismes d'un certain degré d'un espace projectif, ou

(ii) la composante connexe du groupe d'automorphismes d'une variété de drapeaux.

Chacun de ces ensembles est égal au complémentaire d'une famille non vide d'hypersurfaces dans un espace projectif. L'application $t \mapsto g_t$ doit donc être constante. Nous avons donc démontré la proposition suivante:

PROPOSITION 3.3. *Soit T un tore et Q une variété de drapeaux. Les endomorphismes de $T \times Q$ sont tous du type $(t,q) \mapsto (a(t), g(q))$ où a est un endomorphisme de T et g est un endomorphisme de Q.*

En particulier, tous les endomorphismes de ces variétés préservent la projection sur Q. Il s'agit d'un cas particulier de fibration de Tits. Nous allons maintenant montrer que cette dernière est toujours invariante.