2.3 Fibration d'Albanese

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

THÉORÈME 2.2 (K. Peters). *Soit M une variété complexe compacte dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Toute application holomorphe surjective de M dans M est un revêtement non ramifié.*

Démonstration. Supposons que R_f n'est pas vide et fixons une section non nulle ω de $K_M^{\otimes k}$, pour k positif convenable. L'image réciproque de ω par l'itéré $n^{\text{ème}}$ de f est une section de $K_M^{\otimes k}$ qui s'annule sur l'union des diviseurs effectifs R_f, $f^{-1}(R_f)$, ..., $f^{-n-1}(R_f)$. Puisque f est surjective, on obtient ainsi des sections du fibré en droites $K_M^{\otimes k}$ dont le lieu des zéros (comptés avec multiplicité) croît indéfiniment. Ceci est impossible.

2.3 FIBRATION D'ALBANESE

Pour les variétés kählériennes, il existe une deuxième fibration naturelle invariante par tout endomorphisme : la fibration d'Albanese. Notons $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel constitué des 1-formes holomorphes globales de M. Puisque M est supposée kählérienne, chaque forme holomorphe est fermée. En particulier, lorsque γ est un lacet de M, l'intégration d'une 1-forme holomorphe

$$\omega \mapsto \int_\gamma \omega$$

ne dépend que de la classe d'homologie $[\gamma] \in \mathrm{H}^1(M, \mathbf{Z})$. La théorie de Hodge montre que la partie sans torsion de $\mathrm{H}^1(M, \mathbf{Z})$ se plonge de cette manière en un réseau cocompact de $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)^*$. Le tore complexe obtenu en quotientant $\mathrm{H}^0(M, \Omega_M^1)^*$ par ce réseau sera noté $\mathsf{Alb}(M)$: c'est la variété d'Albanese de M.

Choisissons un point base x dans M. Si y est un point de M et ω est une 1-forme fermée, l'intégrale de ω entre x et y dépend du chemin d'intégration choisi, mais les différentes valeurs obtenues coïncident modulo l'intégration de ω sur les lacets basés en x. On dispose ainsi d'une application holomorphe

$$\mathsf{a}_M : M \to \mathsf{Alb}(M), \quad y \mapsto \int_x^y \tag{4}$$

pour chaque choix d'un point base x dans M. C'est la fibration d'Albanese de M. Elle est équivariante sous l'action de tout endomophisme f, l'action induite par f sur $\mathsf{Alb}(M)$ étant la transformation affine associée à l'action de f par image réciproque sur les 1-formes holomorphes (le paramètre de translation provient du choix du point base x).

Pour trouver des endomorphismes non inversibles qui ne préservent aucune fibration, on peut donc supposer que la fibration d'Albanese de M est triviale, c'est-à-dire que ses fibres sont finies ou que l'image est un point. Dans le premier cas, l'existence d'endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration force M à être un tore (voir [28]). Dans le second cas, le premier groupe d'homologie de M est fini.

2.4 Petite dimension

Le théorème d'Hurwitz montre que les courbes qui possèdent des endomorphismes de degré plus grand que 1 sont la droite projective et les courbes elliptiques. Ceci peut être démontré à l'aide de la remarque 2.1.

Les surfaces qui possèdent des endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration doivent être cherchées parmi celles dont la dimension de Kodaira est 0 ou $-\infty$. A côté des tores et du plan projectif on trouve l'exemple des surfaces toriques; ainsi, la transformation polynomiale $[x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2]$ détermine un endomorphisme du plan projectif qui se relève au plan projectif éclaté en $[0 : 0 : 1]$. Les exemples ainsi construits sur les variétés toriques sont tous conjugués à des endomorphismes du plan projectif par une transformation birationnelle. Ces trois familles d'exemples persistent en toute dimension.

D'après [21], les endomorphismes non inversibles des surfaces kählériennes appartiennent tous à l'une de ces trois familles. De surcroît, les fibrations méromorphes invariantes par des endomorphismes non inversibles deviennent triviales après revêtement fini (voir [5], [21] et les références qui s'y trouvent). La situation pour les surfaces est donc bien comprise. Les blocs élémentaires sont des variétés homogènes.

Pour les variétés projectives de dimension 3 dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle, on dispose également d'une classification. Celle-ci n'apporte pas de surprise (voir [25]). Le cas $\mathsf{kod}(M) = -\infty$ est plus intéressant et plus obscur: Ekaterina Amerik a étudié les endomorphismes des variétés qui admettent une fibration par des espaces projectifs, ceci en dimension quelconque [5], mais peu de résultats sont disponibles pour la situation générale.

2.5 Une question proche

Au lieu de regarder les endomorphismes d'une variété X dans elle-même, on peut s'intéresser aux applications surjectives $f: X \to Y$ entre variétés de même dimension. Dans [3], [4], [6], les variétés de Fano, les quadriques et les variétés projectives avec un nombre de Picard égal à 1 sont traitées. Les méthodes employées ont un corollaire intéressant pour notre étude: une hypersurface lisse H de l'espace projectif $\mathbf{P}^N$, $N > 2$, admet