1. MINIMAX D'UNE FONCTION QUADRATIQUE À L'INFINI

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

1. MINIMAX D'UNE FONCTION QUADRATIQUE À L'INFINI

1.1 PRÉLIMINAIRES

Soient X un espace topologique, D^n un disque de dimension n, orienté, et $\psi\colon \mathbf{S}^{n-1} \to X$ une application. On considère sur $\mathbf{S}^{n-1} = \partial D^n$ l'orientation induite. On appelle *cellule* de dimension n le couple $\sigma^n := (D^n, \psi)$. L'espace que l'on construit en identifiant chaque point x de $\mathbf{S}^{n-1}$ au point $\psi(x)$ est obtenu *en attachant à X la cellule σ^n* ; on le note $X \cup \sigma^n$ ou bien $X \cup_\psi D^n$.

Un espace est dit *cellulaire* s'il est obtenu par l'attachement de cellules (un nombre fini pour chaque dimension) à un nombre fini de points (cellules de dimension 0). Un espace cellulaire X est un *complexe cellulaire* si chaque cellule est attachée à une cellule de dimension plus petite.

Il est bien connu que tout espace cellulaire est homotopiquement équivalent à un complexe cellulaire, voir par exemple [DNF], vol. III, §4.

Soit X un complexe cellulaire. La réunion des cellules de dimension $k \leq n$ est appelée *squelette cellulaire* de dimension n, que l'on note X^n. On a alors la suite des squelettes emboîtés

$$X^0 \subset \cdots \subset X^k \subset \cdots \subset X\,.$$

L'espace quotient X^{k-1}/X^{k-2}, où X^{k-2} est identifié à un point, est un bouquet de sphères de dimension $k-1$. Considérons une cellule $\sigma^k = (D^k, \psi)$ et l'application

$$\widetilde{\psi}_i\colon \partial D^k = \mathbf{S}^{k-1} \xrightarrow{\ \psi\ } X^{k-1} \xrightarrow{\ Id\ } X^{k-1}/X^{k-2} \xrightarrow{\ \pi_i\ } \mathbf{S}_i^{k-1}\,,$$

où π_i est la projection sur la i-ème sphère du bouquet. Soit σ_i^{k-1} la cellule de X correspondant à la sphère $\mathbf{S}_i^{k-1}$.

DÉFINITION. On appelle *coefficient d'incidence* du couple de cellules σ^k, σ_i^{k-1} le nombre entier

$$[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}] := \deg(\widetilde{\psi}_i)\,.$$

Soient $E = \mathbf{R}^K$ et $f\colon E \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse excellente [1]), avec un nombre fini de points critiques. D'après le lemme de Morse, autour d'un point

[1]) Une fonction est *de Morse* si ses points critiques sont tous non dégénérés, *excellente* si les valeurs critiques sont toutes distinctes.

critique $\bar{\xi}$ de f, il existe un système de coordonnées $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$ tel que:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_K) = f(\bar{\xi}) - \xi_1^2 - \cdots - \xi_k^2 + \xi_{k+1}^2 + \cdots + \xi_K^2 .$$

Le nombre k, dénoté par $\mathrm{ind}(\bar{\xi})$, est l'*indice* du point critique $\bar{\xi}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on note

$$E_f^\lambda = E^\lambda := \{\xi \in E \mid f(\xi) \leq \lambda\} .$$

THÉORÈME 1.1 ([Mil]). *Si l'intervalle $[a, b]$ ne contient aucune valeur critique de f, alors E^b et E^a sont difféomorphes.*

THÉORÈME 1.2 ([Mil]). *Soient c la seule valeur critique dans l'intervalle $[c-\epsilon, c+\epsilon]$ et $\bar{\xi}$ le point critique correspondant, d'indice $\mathrm{ind}(\bar{\xi}) = i$. Alors $E^{c+\epsilon}$ et E^c se rétractent sur l'espace $E^{c-\epsilon} \cup \sigma^i$ que l'on obtient de $E^{c-\epsilon}$ en attachant à son bord une cellule $\sigma^i = (D^i, \psi)$ de dimension i.*

Pour ξ, η points critiques de f, tels que $\mathrm{ind}(\xi) - \mathrm{ind}(\eta) = 1$, on note $[\xi : \eta]$ l'indice d'incidence des cellules correspondantes.

REMARQUE. Les Théorèmes 1.1 et 1.2 sont vrais pour toute fonction de Morse excellente, dès que le champ gradient est défini et intégrable; par exemple si la condition de Palais-Smale est vérifiée: toute suite $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\nabla f(\xi_n) \to 0$ pour $n \to \infty$ et $\{f(\xi_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, admet une sous-suite convergente.

Soit $b > 0$ un nombre réel assez grand pour que l'intervalle $]-b, b[$ contienne toutes les valeurs critiques de f . On déduit du Théorème 1.1 que $E^\lambda \simeq E^{-b}$ pour $\lambda \leq -b$ et $E^\lambda \simeq E^b$ pour $\lambda \geq b$. On note alors $E^{\pm\infty} := E^{\pm b}$.

Soit $\{\xi_1^k, \dots, \xi_{\#(k)}^k\}$ l'ensemble des points critiques d'indice k de f, ordonnés selon leur valeur critique: $f(\xi_\ell^k) < f(\xi_{\ell+1}^k)$.

DÉFINITION. Le *complexe de Morse* de f est le complexe cellulaire (M_*^f, ∂_*), défini comme suit:

- l'espace M_k^f des chaînes de dimension k est l'espace des combinaisons linéaires formelles sur $\mathbf{Q}$ des points critiques d'indice k de f :

$$M_k^f := \left\{ \sum_{\ell=1}^{\#(k)} \alpha_\ell \ \xi_\ell^k \ \middle| \ \alpha_\ell \in \mathbf{Q} \right\} \simeq \mathbf{Q}^{\#(k)} ;$$

- l'opérateur de bord[2]) est l'application linéaire $\partial\colon M_k^f \to M_{k-1}^f$ définie par la formule

$$\partial\xi_\ell^k := \sum_{m=1}^{\#(k-1)} [\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}]\ \xi_m^{k-1}\,.$$

REMARQUE. D'après les Théorèmes 1.1 et 1.2, l'espace $E/E^{-\infty}$ est un espace cellulaire, homotopiquement équivalent au complexe cellulaire (M_*^f, ∂_*). Il s'ensuit que

$$\widetilde{H}_*(M_*^f, \partial_*) \simeq \widetilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_*(E, E^{-\infty})\,,$$

où $\widetilde{H}_*$ dénote le complexe d'homologie réduite à valeurs dans $\mathbf{Q}$.

En suivant une idée de Cerf ([Cer]), S. A. Barannikov a montré que l'on peut "diagonaliser" les complexes de Morse. C'est pour rendre possible cette diagonalisation que l'on a défini le complexe de Morse sur $\mathbf{Q}$, bien que le complexe originel soit à coefficients entiers.

LEMME ALGÉBRIQUE ([Bar]). *Dans chaque M_k^f il existe un changement de générateurs, représenté par une matrice triangulaire supérieure inversible de dimension $\#(k)$, qui met le complexe de Morse sous forme canonique, c'est-à-dire que les nouveaux générateurs (ordonnés) $\{\Xi_\ell^k\}_{\ell,k}$ ($\ell = 1, \ldots, \#(k)$, $k = 1, \ldots, K$) vérifient*

$$\partial\Xi_\ell^k = 0 \quad \textit{ou} \quad \partial\Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}\,. \tag{1}$$

Démonstration. Par récurrence : supposons que les générateurs Ξ_j^h soient du type (1) pour $h = k$ et $j \le \ell$, et pour $h < k$ et $j \in \{1, \ldots, \#(h-1)\}$. Soit Q l'ensemble des indices q tels que $\Xi_q^{k-1} = \partial\Xi_{q^*}^k$ pour quelque $q^* \le j$, et $P := \{1, \ldots, \#(k-1)\} \setminus Q$. L'égalité $\partial\xi_{j+1}^k = \sum_{m=1}^{\#(k-1)} \alpha_m \Xi_m^{k-1}$ s'écrit donc

$$\partial\Big(\xi_{j+1}^k - \sum_{q\in Q} \alpha_{q^*}\,\Xi_{q^*}^k\Big) = \sum_{p\in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}\,.$$

Si $\alpha_p = 0$ pour tout $p \in P$, le générateur $\Xi_{j+1}^k := \xi_{j+1}^k - \sum_{q\in Q} \alpha_{q^*}\xi_{q^*}^k$ est canonique, en effet $\partial\Xi_{j+1}^k = 0$. Sinon, soit p_0 le plus grand indice dans P tel que $\alpha_{p_0} \neq 0$:

$$\partial\Big(\xi_{j+1}^k - \sum_{q\in Q} \alpha_{q^*}\,\Xi_{q^*}^k\Big) = \alpha_{p_0}\Xi_{p_0}^{k-1} + \sum_{p_0 > p\in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}\,. \tag{2}$$

---

[2]) Pour la démonstration du fait que $\partial^2 = 0$, voir [DNF], vol. III, §4.

Remplaçons le générateur $\Xi_{p_0}^{k-1}$ par $\widetilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} := \Xi_{p_0}^{k-1} + \frac{1}{\alpha_{p_0}} \sum_{p_0>p\in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}$, qui est encore de la forme (1), car $\partial\widetilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} = \partial\Xi_{p_0}^{k-1} = 0$. L'égalité (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha_{p_0}}\ \partial\Big(\xi_{j+1}^k - \sum_{q\in Q} \alpha_{q^*}\,\Xi_{q^*}^k\Big) = \widetilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}\,;$$

ainsi le générateur

$$\Xi_{j+1}^k := \frac{1}{\alpha_{p_0}}\ \Big(\xi_{j+1}^k - \sum_{q\in Q} \alpha_{q^*}\,\Xi_{q^*}^k\Big)$$

vérifie $\partial\Xi_{j+1}^k = \widetilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}$. □

REMARQUES.

(1) Tout complexe (avec générateurs ordonnés) admet une forme canonique. De plus, cette forme est uniquement déterminée par le complexe initial (voir [Bar]).

(2) Sur les espaces M_k^f on peut définir un autre opérateur de bord $\delta\colon M_k^f \to M_{k-1}^f$ par la formule

$$\delta\xi_\ell^k := \sum_m \beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})\ \xi_m^{k-1}\,,$$

où $\beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$ est le nombre (algébrique) de trajectoires intégrales du champ de vecteurs $Y := -\nabla f/|\nabla f|^2$ de ξ_ℓ^k à ξ_m^{k-1}. Puisque l'attachement des cellules σ_ℓ^k est induit par la rétraction des espaces E^λ le long des trajectoires intégrales de Y, on a $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ si et seulement s'il existe (au moins) une trajectoire de Y entre les deux points critiques correspondants. Ainsi, d'après le remarque précédent, les complexes (M_*^f, ∂_*) et (M_*^f, δ_*) ont la même forme canonique.

1.2 POINTS CRITIQUES INCIDENTS, LIÉS ET LIBRES

Soit (M_*^f, ∂_*) le complexe de Morse en forme canonique d'une fonction de Morse excellente $f\colon E = \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$. A chaque point critique ξ_ℓ^k correspond le générateur Ξ_ℓ^k, c'est-à-dire

$$\Xi_\ell^k = \sum_{j\le\ell} \alpha_j\ \xi_j^k\ , \quad \text{avec } \alpha_\ell \neq 0\,.$$

DÉFINITION. On dit que deux points critiques ξ_ℓ^k et ξ_m^{k-1} de f sont *incidents* si $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$, *liés* si $\partial\Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}$. Un point critique est *libre* s'il n'est lié à aucun point critique.

DÉFINITION. On appelle *diagramme (du complexe) de Morse* la représentation suivante du complexe de Morse de f. On considère $K+1$ axes réels verticaux (avec la même échelle et l'origine à la même hauteur), numérotés, de gauche à droite, de K à 0. Sur le i-ème axe on considère les points critiques de f d'indice i, disposés selon leur valeur critique. On joint par un segment en tirets les couples de points critiques incidents, par un segment continu les couples de points critiques liés (cf. Figure 1).

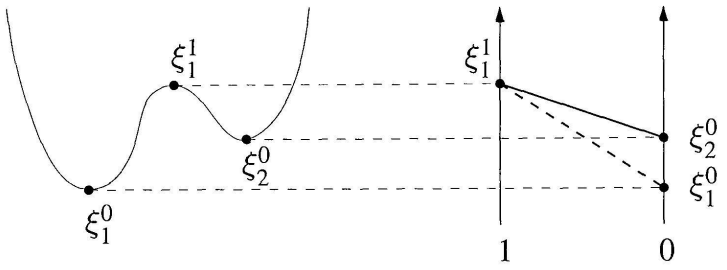


FIGURE 1
Diagrammes de Morse de $\xi \mapsto \xi^4 - \xi^2 + \xi$

REMARQUES. Considérons un point critique ξ_ℓ^k de f.

(1) Les segments qui ont ξ_ℓ^k comme extrémité sont tous du même côté de l'axe où se trouve ξ_ℓ^k, car $\partial^2 = 0$.

(2) Les segments (orientés du point d'indice plus grand vers celui d'indice plus petit) ont tous pente négative, car si $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ alors $f(\xi_\ell^k) > f(\xi_m^{k-1})$.

(3) Un point critique peut être une extrémité de plusieurs segments en tirets, mais d'un seul segment continu (au plus).

PROPOSITION 1.3. *Soit $(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$ un couple de points critiques liés. Alors ξ_m^{k-1} est le point critique de valeur critique maximale parmi les points critiques incidents à ξ_ℓ^k tels que $[\xi_j^k : \xi_m^{k-1}] = 0$ pour tout $j < \ell$; ξ_ℓ^k est le point critique de valeur critique minimale parmi les points critiques incidents à ξ_m^{k-1} tels que $[\xi_\ell^k : \xi_j^{k-1}] = 0$ pour tout $j > m$.*

PROPOSITION 1.4. *Un point critique ξ est libre si et seulement si pour tout point critique η incident à ξ, il existe un point critique ξ', incident à η, tel que*

$$|f(\xi') - f(\eta)| < |f(\xi) - f(\eta)|.$$

Les deux propositions sont une conséquence immédiate du choix de l'indice p_0 dans la preuve du lemme algébrique.

PROPOSITION 1.5. *Deux points critiques de f liés le sont aussi en tant que points critiques de $-f$.*

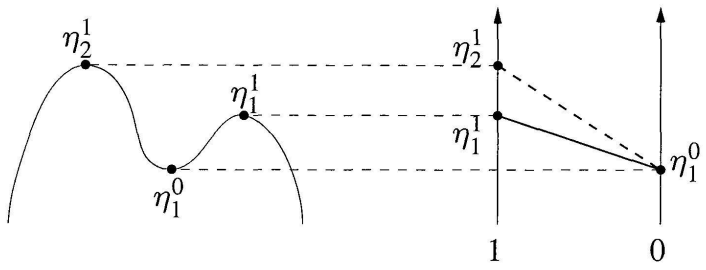


FIGURE 2
Diagrammes de Morse de $\xi \mapsto -(\xi^4 - \xi^2 + \xi)$

Démonstration. Un point critique ξ_ℓ^k de f, d'indice k, est un point critique de $-f$, d'indice $K-k$. Soit $c := f(\xi_\ell^k)$; d'après le Théorème 1.2 on a

$$E_f^{c+\epsilon} \simeq E_f^{c-\epsilon} \cup \sigma_\ell^k, \quad E_{-f}^{-c+\epsilon} \simeq E_{-f}^{-c-\epsilon} \cup \tau_m^{K-k}.$$

Or, puisque $\partial\sigma_\ell^k$ et $\partial\tau_m^{K-k+1}$ sont enchaînées, on a $[\sigma_j^i, \sigma_h^{i-1}] = \pm[\tau_h^{K-i+1}, \tau_j^{K-i}]$ (voir [DNF], vol. III, §18). Il s'ensuit que les complexes de Morse de f et de $-f$ ont les mêmes couples de points critiques incidents. Puisque l'on obtient le complexe de $-f$ de celui de f par une symétrie qui ne change pas la pente des segments (cf. Figure 2), la proposition précédente entraîne que les couples de points critiques liés sont les mêmes. □

1.3 LE NIVEAU CRITIQUE DE MINIMAX

Soit maintenant $f\colon E = \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2, quadratique à l'infini, c'est-à-dire $f(\xi) = Q_\infty(\xi)$ pour $|\xi|$ assez grand, où Q_∞ est une forme quadratique non dégénérée d'indice k_∞. On ne suppose pas nécessairement que f soit de Morse excellente. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ considérons la famille d'inclusions naturelles $i_\lambda\colon E^\lambda \hookrightarrow E$, qui induit les homomorphismes $i_\lambda^*\colon \widetilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \to \widetilde{H}_*(E^\lambda, E^{-\infty})$ des groupes d'homologie relative réduite à valeurs en $\mathbf{Q}$.

Comme f est quadratique à l'infini, on a

$$\widetilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_*(\mathbf{S}^{k_\infty}).$$

Soit Γ un générateur de $\widetilde{H}_{k_\infty}(E, E^{-\infty}) \simeq \mathbf{Q}$.

DÉFINITION. On appelle *minimax* de f le nombre réel

$$\min\max(f) := \inf\{\lambda \in \mathbf{R} \mid i_\lambda^* \Gamma \neq 0\}.$$

REMARQUE. Puisque la topologie des niveaux change au passage de ce niveau, le minimax est une valeur critique de f.

Dans le cas des fonctions de Morse excellentes, on peut caractériser le minimax d'une fonction en utilisant la classification de ses points critiques donnée au §1.2.

THÉORÈME 1.6. *Si f est une fonction de Morse excellente, quadratique à l'infini, elle admet un seul point critique libre, d'indice k_∞, et le minimax de f est le niveau critique réalisé par ce point.*

Démonstration. Soit ξ un point critique de f, Ξ le générateur correspondant du complexe de Morse en forme canonique. Alors ξ est libre si et seulement si

$$\partial\Xi = 0 \quad \text{et} \quad \Xi \notin \partial M^f,$$

c'est-à-dire si et seulement si Ξ est le représentant d'une classe $[\Xi]$ non nulle dans $H_*(M^f, \partial)$. D'après l'isomorphisme $\widetilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_*(M_*^f, \partial_*)$ on déduit qu'il existe un seul générateur $\Xi_\ell^{k_\infty}$ tel que $[\Xi_\ell^{k_\infty}]$ est bien définie et non nulle dans $H_*(M_*^f, \partial_*)$. Par conséquent, f a un seul point critique libre, d'indice k_∞, et le minimax de f est réalisé par ce point. □

Pour pouvoir utiliser cette caractérisation du minimax il faut se ramener au cas des fonctions de Morse excellentes, c'est-à-dire des fonctions génériques. Pour cela il suffit de "déformer" un peu notre fonction.

DÉFINITION 1.7. Une *déformation* de f est un élément g de $C^2(\mathbf{R}^K; \mathbf{R})$ tel que $g(\xi) = f(\xi)$ pour $|\xi|$ assez grand. Une *petite déformation* de f est une déformation proche de f pour la norme C^2.

THÉORÈME 1.8. *Le minimax est stable par petites déformations de f.*

Démonstration. Soient $c_1 < \cdots < c_r$ les valeurs critiques de f, $\epsilon > 0$ fixé, assez petit pour que $c_i + \epsilon < c_{i+1} - \epsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, r-1$. Si g est une déformation de f assez petite, ses valeurs critiques sont contenues dans la réunion des ensembles $]c_i - \epsilon\,,\, c_i + \epsilon[$ (cf. Figure 3).

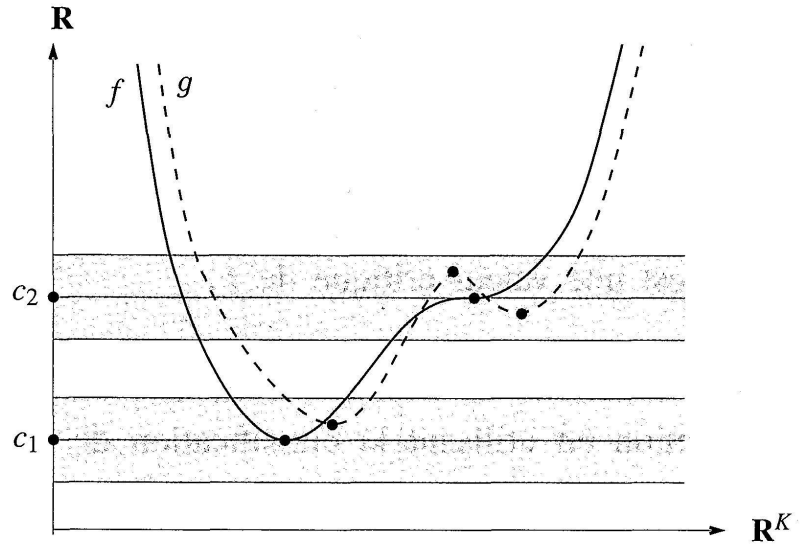


FIGURE 3
Petite déformation qui rend générique une fonction non de Morse

Par conséquent, pour tout i, les ensembles $E^{c_i+\epsilon}$ et $E_g^{c_i+\epsilon}$ sont difféomorphes, aussi bien que les ensembles $E^{c_i-\epsilon}$ et $E_g^{c_i-\epsilon}$. Il s'ensuit que

$$\widetilde{H}_*(E^{c_i+\epsilon}) \simeq \widetilde{H}_*(E_g^{c_i+\epsilon}), \qquad \widetilde{H}_*(E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_*(E_g^{-\infty}).$$

Si on pose

$$A_k := H_k(E^{-\infty}), \quad B_k := \widetilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}), \quad C_k := \widetilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}, E^{-\infty}),$$
$$A'_k := H_k(E_g^{-\infty}), \quad B'_k := \widetilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}), \quad C'_k := \widetilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty}),$$

on a les suites exactes longues en homologie relative:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & A_k & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & A_{k-1} & \longrightarrow & B_{k-1} & \ldots \\
 & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \star\downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & \\
\ldots & A'_k & \longrightarrow & B'_k & \longrightarrow & C'_k & \longrightarrow & A'_{k-1} & \longrightarrow & B'_{k-1} & \ldots
\end{array}$$

Le "lemme des cinq" bien connu entraîne que la flèche $\star$. est aussi un isomorphisme: $\widetilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}, E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty})$. Si on note $u = c_\ell$ le minimax de f, il en résulte que

$$\widetilde{H}_{k_\infty}(E_g^{u+\epsilon}, E_g^{-\infty}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{H}_{k_\infty}(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty}) = 0, \ \forall i = 1, \ldots, \ell - 1,$$

donc le minimax de g appartient à l'ensemble $]u-\epsilon, u+\epsilon[$, ce qui démontre le théorème. □

Le minimax de f admet la construction "duale" naturelle suivante. Soient $\check{E}^c := E_{-f}^{-c}$, $j_\lambda : \check{E}^\lambda \hookrightarrow E$ la famille d'inclusions naturelles et Δ un générateur de $\widetilde{H}_{K-k_\infty}(E, \check{E}^{+\infty}) \simeq \mathbf{Q}$.

DÉFINITION. On appelle *max-min* de f le nombre

$$\max\min(f) := \sup\{\lambda \in \mathbf{R} \mid j_\lambda^* \Delta \neq 0\} = -\min\max(-f)\,.$$

THÉORÈME 1.9. *Le minimax de f coïncide avec le max-min.*

Démonstration. D'après le Théorème 1.8 on peut supposer f générique, donc de Morse excellente. Alors on déduit de la Proposition 1.5 que f et $-f$ ont le même point critique libre. □

Le résultat suivant sera utile plus loin.

PROPOSITION 1.10. *Soit f une fonction excellente, $\bar{\xi}$ un point critique dégénéré de f, de valeur critique $c := f(\bar{\xi})$. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux déformations g, h de f telles que :*

(i) *g et h sont ϵ-proches de f ;*

(ii) *g n'a aucune valeur critique dans $]c-\epsilon, c+\epsilon[$;*

(iii) *h a deux valeurs critiques, $c_1 = f(\bar{\xi}_1)$ et $c_1 = f(\bar{\xi}_2)$ dans $]c-\epsilon, c+\epsilon[$, telles que ξ_1 et ξ_2 sont non dégénérés.*

Alors ξ_1 et ξ_2 sont liés.

Démonstration. Le même argument que pour la preuve du Théorème 1.8 (où l'on considère $E^{c-\epsilon}$ au lieu de $E^{-\infty}$) montre que

$$\widetilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) \simeq \widetilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c+\epsilon})\,.$$

Or, d'après le Théorème 1.2, on a $\widetilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c-\epsilon}) = 0$. Par conséquent $\widetilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) = 0$, c'est-à-dire ξ_1 et ξ_2 sont incidents. Il s'ensuit que ξ_1 et ξ_2 sont liés (Proposition 1.3). □

2. LA SOLUTION DE MINIMAX

2.1 RAPPELS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Soit X une variété différentielle de dimension n, $T^*X = \{(x;y)\}$ le fibré cotangent[3]) de X, $\pi\colon T^*X \to X$ la projection naturelle $(x,y) \mapsto x$. Le fibré T^*X, muni de la forme symplectique canonique $dy \wedge dx$, est une variété symplectique de dimension $2n$.

---

[3]) Pas nécessairement trivial.