4. Quasiconvex subgroups of hyperbolic groups

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

4. Quasiconvex subgroups of hyperbolic groups

Detailed background information on quasiconvex subgroups of hyperbolic groups can be found in [1, 4, 20, 31, 38, 34, 32, 51, 54, 68] and other sources.

Convention 4.1. Suppose G is a finitely generated group with a fixed finite generating set A. Let $X = \Gamma(G, A)$ be the Cayley graph of G with respect to A. We will denote the word-metric corresponding to A on X by d_A. Also, for $g \in G$ we will denote $|g|_A := d_A(1, g)$. For a word w in the alphabet $A \cup A^{-1}$ we will denote by $\overline{w}$ the element of G represented by w.

Definition 4.2 (Quasiconvexity). For $\epsilon \geq 0$ a subset Z of a metric space (X, d) is *ϵ-quasiconvex* if, for any $z_1, z_2 \in Z$ and any geodesic $[z_1, z_2]$ in X, the segment $[z_1, z_2]$ is contained in the closed ϵ-neighborhood of Z. A subset $Z \subseteq X$ is *quasiconvex* if it is ϵ-quasiconvex for some $\epsilon \geq 0$.

If G is a finitely generated group and A is a finite generating set of G, a subgroup $H \leq G$ is *quasiconvex in G with respect to A* if $H \subseteq \Gamma(G, A)$ is a quasiconvex subset.

It turns out [20, 32, 4, 31] that for subgroups of word-hyperbolic groups quasiconvexity is independent of the choice of a finite generating set for the ambient group. Thus a subgroup H of a hyperbolic group G is termed *quasiconvex* if $H \subseteq \Gamma(G, A)$ is quasiconvex for some finite generating set A of G.

We summarize some well-known basic facts regarding quasiconvex subgroups and provide some sample references:

Proposition 4.3. *Let G be a word-hyperbolic group with a finite generating set A. Let $X = \Gamma(G, A)$ be the Cayley graph of G with the word-metric d_A induced by A. Then:*

1. *If $H \leq G$ is a subgroup, then either H is virtually cyclic (in which case H is called* elementary*) or H contains a free subgroup F of rank two which is quasiconvex in G (in this case H is said to be* nonelementary*)* [20, 32].
2. *Every cyclic subgroup of G is quasiconvex in G* [1, 20, 32].
3. *If $H \leq G$ is quasiconvex then H is finitely presentable and word-hyperbolic* [1, 20, 32].

4. *Suppose $H \leq G$ is generated by a finite set Q inducing the word-metric d_Q on H. Then H is quasiconvex in G if and only if there is a $C > 0$ such that for any $h_1, h_2 \in H$*

$$d_Q(h_1, h_2) \leq C d_A(h_1, h_2)$$

(*see* [20, 32, 4, 31]).

5. *The set $\mathcal{L}$ of all A-geodesic words is a regular language that provides a bi-automatic structure for G. Moreover, a subgroup $H \leq G$ is quasiconvex if and only if H is $\mathcal{L}$-rational, that is the set $\mathcal{L}_H = \{w \in \mathcal{L} \mid \overline{w} \in H\}$ is a regular language* [31].
6. *If $H_1, H_2 \leq G$ are quasiconvex, then $H_1 \cap H_2 \leq G$ is quasiconvex* [68].
7. [51, 46] *Let $C \leq B \leq G$ where B is quasiconvex in G (and hence B is hyperbolic) and C is quasiconvex in B. Then C is quasiconvex in G* [51, 46].
8. *Let $C \leq B \leq G$ where C is quasiconvex in G and where B is word-hyperbolic. Then C is quasiconvex in B* [51, 46].
9. *Suppose $H \leq G$ is an infinite quasiconvex subgroup. Then H has finite index in its* commensurator *$Comm_G(H)$ (see* [51]*), where $Comm_G(H) := \{g \in G \mid [H : g^{-1}Hg \cap H] < \infty$ and $[g^{-1}Hg : g^{-1}Hg \cap H] < \infty\}$.*

Part 1 of the above proposition implies that a nonelementary subgroup of a hyperbolic group is nonamenable.

5. Proof of the main result

Let G be a nonelementary word-hyperbolic group with a finite generating set A. Let $X = \Gamma(G, A)$ be the Cayley graph of G with the word metric d_A. Let $\delta \geq 1$ be an integer such that the space $(\Gamma(G, A), d_A)$ is δ-hyperbolic. Let $H \leq G$ be a quasiconvex subgroup of infinite index in G. These conventions, unless specified otherwise, will be fixed for the remainder of the paper.

We shall need the following useful fact:

Lemma 5.1. *There exists an integer constant $K = K(G, H, A) > 0$ with the following properties.*

Assume $g \in G$ is shortest with respect to d_A in the coset class Hg. Then for any $h \in H$ we have $(g, h)_1 \leq K$ (and hence $(g, H)_1 \leq K$).