7. The -cone of $S^{2n} \times S^{2m}$ and the positive cone of $S^2 \times S^{2n}$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

We now turn to the product $S^{2n-1} \times S^{2m-1}$. From the six-term exact sequence of the pair $(S^{2n-1} \times S^{2m-1}, S^{2n-1} \vee S^{2m-1})$, with quotient the smash product $S^{2n-1} \wedge S^{2m-1}$ homeomorphic to $S^{2m+2n-2}$, we get an isomorphism

$$q^* : \widetilde{K}(S^{2m+2n-2}) \longrightarrow \widetilde{K}(S^{2n-1} \times S^{2m-1})$$

induced by the quotient map $q: S^{2n-1} \times S^{2m-1} \longrightarrow S^{2m+2n-2}$. By Theorem 4.1, the space $Y = S^{2n+2m-2}$ satisfies the hypothesis of Proposition 5.5 and we deduce the

THEOREM 6.2. *The map* $q: S^{2n-1} \times S^{2m-1} \longrightarrow S^{2m+2n-2}$ *induces an isomorphism of positive cones, and, for* $S^{2n-1} \times S^{2m-1}$, *the* γ*-cone and the c-cone coincide with the positive cone:*

$$K_+(S^{2m+2n-2}) \overset{q^*}{\cong} K_+(S^{2n-1} \times S^{2m-1}) = K_\gamma(S^{2n-1} \times S^{2m-1}).$$

REMARK 6.3. According to Blackadar ([Bla2], 6.10.2), the positive cone of the n-torus $(S^1)^n$ has been partially computed by Villadsen.

7. THE γ-CONE OF $S^{2n} \times S^{2m}$ AND THE POSITIVE CONE OF $S^2 \times S^{2n}$

The positive cone was rather easy to compute for a product of an odd-dimensional sphere by any sphere, whereas the case of a product of two even-dimensional spheres is much more involved. On the other hand, the γ-cone of such a product is in the scope of the present notes. We perform this calculation by computing the c-cone and appealing to Proposition 3.3.

By the Künneth theorem, we have an isomorphism

$$K(S^{2n}) \otimes K(S^{2m}) \longrightarrow K(S^{2n} \times S^{2m}), \ \xi \otimes \eta \longmapsto p^*(\xi) \cdot q^*(\dot{\eta}),$$

where p and q are the projections onto the factors. Writing $\widetilde{K}(S^{2n}) = \mathbf{Z} \cdot x_1$ and $\widetilde{K}(S^{2m}) = \mathbf{Z} \cdot x_2$, and letting $y_1 := p^*(x_1)$ and $y_2 := q^*(x_2)$, we deduce that

$$\widetilde{K}(S^{2n} \times S^{2m}) = \mathbf{Z} \cdot y_1 \oplus \mathbf{Z} \cdot y_2 \oplus \mathbf{Z} \cdot y_1 y_2 .$$

The product structure on $\widetilde{K}(S^{2n} \times S^{2m})$ is given by $y_1^2 = 0$ and $y_2^2 = 0$. One has $y_1 y_2 = \pi^*(y)$, where $\pi: S^{2n} \times S^{2m} \longrightarrow S^{2n} \wedge S^{2m} \cong S^{2n+2m}$ and y is a suitable generator of $\widetilde{K}(S^{2n+2m})$. Let $i: S^{2n} \hookrightarrow S^{2n} \times S^{2m}$ and $j: S^{2m} \hookrightarrow S^{2n} \times S^{2m}$ be the inclusions. One has $i^*(y_1) = x_1$ and $j^*(y_2) = x_2$, and (by Theorem 4.1 and a double application of Proposition 5.1), for any $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, one has

g-dim(ky_1) = g-dim$(kx_1) = n$; similarly g-dim(ky_2) = g-dim$(kx_2) = m$. This justifies that, from now on, we write x_1 and x_2 for y_1 and y_2 respectively.

Let $a_1 \in H^{2n}(S^{2n}; \mathbf{Z})$ and $a_2 \in H^{2m}(S^{2m}; \mathbf{Z})$ be suitable generators (referring to Proposition 2.4). As before, it is justified to write

$$\widetilde{H}^*(S^{2n} \times S^{2m}; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \cdot a_1 \oplus \mathbf{Z} \cdot a_2 \oplus \mathbf{Z} \cdot a_1 a_2 .$$

Let us assume $n \leq m$. Consider an element $x = ax_1 + bx_2 + lx_1x_2$ in the group $\widetilde{K}(S^{2n} \times S^{2m})$. For the Chern classes, invoking Proposition 2.4 and "exponentiality" of the total Chern class, we compute

$$\begin{aligned} c(x) &= c(ax_1)c(bx_2)c(lx_1x_2) \\ &= 1 + (-1)^{n-1}a(n-1)! \cdot a_1 + (-1)^{m-1}b(m-1)! \cdot a_2 \\ &\qquad + (-1)^{n+m}(ab(n-1)!\,(m-1)! - l(n+m-1)!) \cdot a_1 a_2 . \end{aligned}$$

This immediately gives the γ-cone (which coincides with the c-cone) in terms of the γ-dimension function.

THEOREM 7.1. *For $n \leq m$, the γ-dimension on $\widetilde{K}(S^{2n} \times S^{2m})$ is given as follows: for $x = ax_1 + bx_2 + lx_1x_2 \in \widetilde{K}(S^{2n} \times S^{2m})$, one has*

$$\gamma\text{-dim}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } a = b = l = 0 \\ n & \text{if } a \neq 0,\ b = l = 0 \\ m & \text{if } b \neq 0,\ l = ab\,(n-1)!\,(m-1)!/(n+m-1)! \\ n+m & \text{if } l \neq ab\,(n-1)!\,(m-1)!/(n+m-1)! \end{cases}$$

Moreover, for $k \neq 0$, one has

$$\text{g-dim}(kx_1) = n \quad \text{and} \quad \text{g-dim}(kx_2) = m .$$

This theorem allows us to give some interesting information on the positive cone of the product $S^{2n} \times S^{2m}$. We will state the result as Theorem 8.2 in the following section, because the tools developed there allow one to make a crucial improvement.

Combined with Theorem 2.3, Theorem 7.1 enables one to compute completely the positive cone of $S^2 \times S^{2n}$.

THEOREM 7.2. *For the product $S^2 \times S^{2n}$, we have*

$$K_+(S^2 \times S^{2n}) = K_c(S^2 \times S^{2n}) = K_\gamma(S^2 \times S^{2n}) .$$

The latter is given by Theorem 7.1.