

2. An algebraic example

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. AN ALGEBRAIC EXAMPLE

Let V be an n -dimensional real vector space and let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a positive definite inner product defined on V . A bilinear $R: V \times V \rightarrow \text{End}(V)$ is called an *algebraic curvature tensor* if it has the following three properties:

- (1) $\langle R(x, y)z, w \rangle = -\langle R(y, x)z, w \rangle$
- (2) $\langle R(x, y)z, w \rangle = -\langle R(x, y)w, z \rangle$
- (3) $\langle R(x, y)z, w \rangle + \langle R(y, z)x, w \rangle + \langle R(z, x)y, w \rangle = 0$

These three properties then imply the following symmetry property

$$\langle R(x, y)z, w \rangle = \langle R(z, w)x, y \rangle;$$

see [KN, p. 198] or [Sp1, p. 4D-17]) for details. We can also identify the space of algebraic curvature tensors with the space K of symmetric endomorphisms of the second exterior product $\wedge^2(V)$ such that:

- (4) $\langle K(x \wedge y), z \wedge w \rangle + \langle K(y \wedge z), x \wedge w \rangle + \langle K(z \wedge x), y \wedge w \rangle = 0$.

Here the inner product on $\wedge^2(V)$ is induced from the inner product on V . We say that a collection of 2-dimensional subspaces are linearly independent if the associated elements of $\wedge^2(V)$ are linearly independent in $\wedge^2(V)$. For example, let $\{e_1, \dots, e_n\}$ be a basis of V . Then the 2-subspaces spanned by $\{e_i, e_j\}_{i \neq j}$ are independent. The bi-quadratic tensor $\langle R(x, y)y, x \rangle$ determines R ; we refer to [KN, p. 198] for the proof of the following result:

PROPOSITION 2.1. *Let R be an algebraic curvature tensor such that*

$$\langle R(x, y)y, x \rangle = 0 \quad \text{for all } x \text{ and } y.$$

Then $R = 0$.

The space of curvature tensors has dimension $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$; see for example M. Berger [B, p. 63]. Thus, if $n = 3$ then equations (3) and (4) follow from equations (1) and (2). Let $\{e_1, e_2, e_3\}$ be an orthonormal basis for V . We define a symmetric endomorphism K of $\wedge^2(V)$ by:

$$K(e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_1, \quad K(e_2 \wedge e_3) = 0, \quad K(e_3 \wedge e_1) = e_1 \wedge e_2.$$

Note that K is a non-trivial algebraic curvature tensor with the following three vanishing sectional curvatures:

$$Q_K(e_1 \wedge e_2) = Q_K(e_2 \wedge e_3) = Q_K(e_3 \wedge e_1) = 0.$$

More generally let $n \geq 3$ and let $\{e_1, \dots, e_n\}$ be an orthonormal basis for V . If we impose the condition that $Q_K(e_i \wedge e_j) = 0$ with $i < j$, then we have imposed $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions. Since the dimension of the space of algebraic curvature tensors is $\frac{n^2(n^2-1)}{12} > \frac{n(n-1)}{2}$, a simple counting argument then shows there are non-trivial algebraic curvatures with $Q_K(e_i \wedge e_j) = 0$ for $i < j$; thus Assertion 1.1 fails in the algebraic setting.

3. CURVATURE ZERO 2-PLANES IN $S^a \times H^a \times T^b$

In this section we discuss two examples showing Assertion 1.1 is false. Let H^a , S^a , and T^b be spaces of constant sectional curvature -1 , $+1$, and 0 where $a \geq 2$. We begin by studying orthonormal frame fields.

PROPOSITION 3.1. *Let $M(a, b) := S^a \times H^a \times T^b$ with the product metric, where $a \geq 2$. There exists a local orthonormal frame $\{e_i\}$ for the tangent bundle of $M(a, b)$ such that $Q(e_i \wedge e_j) = 0$ for $1 \leq i < j \leq 2a + b$.*

Proof. Let $\{u_i\}$ and $\{v_i\}$ be local orthonormal frames for the tangent bundles of S^a and H^a for $1 \leq i \leq a$. Let $\{w_j\}$ be a local orthonormal frame for the tangent bundle of T^b for $1 \leq j \leq b$. Define

$$\begin{aligned} e_{2i-1} &:= \frac{u_i + v_i}{\sqrt{2}} & \text{for } 1 \leq i \leq a, \\ e_{2i} &:= \frac{u_i - v_i}{\sqrt{2}} & \text{for } 1 \leq i \leq a, \\ e_{2a+j} &:= w_j & \text{for } 1 \leq j \leq b. \end{aligned}$$

The $\{e_k\}$ for $1 \leq k \leq 2a + b$ form a local orthonormal frame for the tangent space of $M(a, b) := S^a \times H^a \times T^b$. We have $\langle R(u_i, w_j) w_j, u_i \rangle = 0$, $\langle R(v_i, w_j) w_j, v_i \rangle = 0$, and $\langle R(v_i, w_j) w_j, v_i \rangle = 0$. Thus $Q(e_i \wedge e_j) = 0$ if either $i > 2a$ or $j > 2a$. We also have $\langle R(u_{i_1}, u_{i_2}) u_{i_2}, u_{i_1} \rangle = +1$ and $\langle R(v_{i_1}, v_{i_2}) v_{i_1}, v_{i_2} \rangle = -1$ for $i_1 < i_2$. We can show that $Q(e_i \wedge e_j) = 0$ for $i \leq 2a$ and $j \leq 2a$ by computing:

$$\begin{aligned} \langle R(e_1, e_2) e_2, e_1 \rangle &= 0, \\ \langle R(e_1, e_3) e_3, e_1 \rangle &= \frac{1}{4} \{ \langle R(u_1, u_2) u_2, u_1 \rangle + \langle R(v_1, v_2) v_2, v_1 \rangle \} = 0, \\ \langle R(e_1, e_4) e_4, e_1 \rangle &= \frac{1}{4} \{ \langle R(u_1, u_2) u_2, u_1 \rangle + (-1)^2 \langle R(v_1, v_2) v_2, v_1 \rangle \} = 0, \text{ etc. } \square \end{aligned}$$

Proposition 3.1 deals with orthonormal frames. We now turn to coordinate frames. If (x_1, \dots, x_n) is a system of local coordinates, set $\partial_i^x := \frac{\partial}{\partial x_j}$.