

# 3. Les petites déformations des courbes planes nodales

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. Les séparantes, avec  $r = 1$  et donc  $g \equiv 0 \pmod{2}$ , se déduisent de la *sphère équatoriale* en lui attachant récursivement une paire d'oreilles (cf. Figure 5).

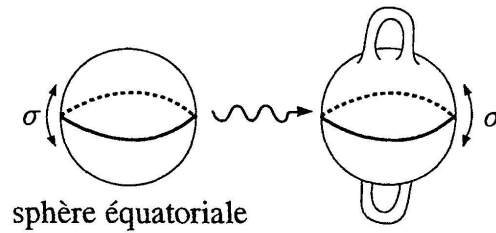


FIGURE 5

### 3. LES PETITES DÉFORMATIONS DES COURBES PLANES NODALES

Notre outil principal est le *théorème de Brusotti* sur l'indépendance de la simplification des nœuds (= points doubles ordinaires) des courbes planes (cf. [Br] ou [BR], pp. 269–275). On va en faire un double usage.

- D'abord pour faire du plan  $\mathbf{P}^2$  l'habitable de « déformations » explicites de courbes algébriques réelles, permettant en particulier de modéliser l'opération clé  $(g, r, a) \mapsto (g + 1, r + 1, a)$  pour la génération des surfaces symétriques, et d'obtenir ainsi une preuve « purement projective » du théorème de Klein relatif aux *courbes « abstraites »*.

- Et ensuite comme outil de *construction de courbes réelles lisses dans le plan*: la méthode consiste à se donner deux courbes réelles transverses de petits degrés (typiquement des droites et des coniques) dont la topologie est bien comprise, puis de « lissifier » la réunion de leurs parties réelles; le théorème de Brusotti assure alors l'existence d'une courbe algébrique réelle lisse dont la partie réelle réalise les lissifications prescrites. Cette remarquable flexibilité graphique des courbes planes réelles nodales (qui est essentiellement une conséquence du théorème de Riemann-Roch) va jouer un rôle crucial dans la partie constructive du problème de Klein.

THÉORÈME 3.1 (Brusotti 1921). • Soit  $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$  une courbe plane de degré  $d$  (non nécessairement irréductible) dont les seules singularités sont des nœuds  $p_1, \dots, p_\delta$ . Alors pour tout choix de points doubles  $S \subset \{p_1, \dots, p_\delta\}$ , il existe une courbe plane  $\Delta$  de même degré  $d$  voisine de  $\Gamma$  qui simplifie les nœuds prescrits  $S$  et conserve les nœuds restants (modulo mouvements infinitésimaux).

• Si en outre la courbe  $\Gamma$  est réelle, alors la courbe simplifiée  $\Delta$  peut aussi être choisie réelle, pour autant que chaque simplification d'un nœud imaginaire s'accompagne de celle du nœud imaginaire conjugué.

De plus chaque nœud réel (qu'il soit isolé ou non) admet deux modes de simplifications (cf. Figure 6) que l'on peut prescrire de façon indépendante.

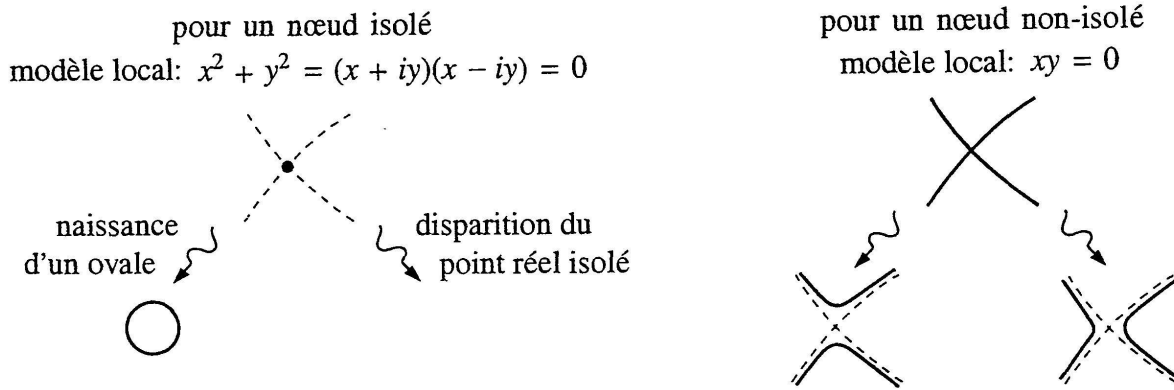


FIGURE 6

#### 4. LE THÉORÈME DE KLEIN

La classification topologique des surfaces symétriques abstraites étant effectuée, on se demande lesquelles proviennent de l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. La réponse est donnée par le :

**THÉORÈME 4.1 (Klein 1882).** *Toutes les surfaces symétriques sont réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle irréductible et lisse.*

*Preuve.* Il suffit de réaliser les modèles minimaux, puis de modéliser «algèbro-géométriquement» l'opération d'attachement d'une anse bagueée.

- Réalisation des modèles minimaux.

On considère des courbes hyperelliptiques réelles  $\Gamma_0 : y^2 = f(x)$  où  $f(x)$  est un polynôme réel de degré  $2g + 2$  ayant des racines distinctes. La normalisée  $\tilde{\Gamma}$  de la courbe projective  $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$  associée à  $\Gamma_0$  est alors une courbe réelle de genre  $g$ .

1. Si  $f(x)$  est choisi tel que  $f(x) < 0 \forall x \in \mathbf{R}$ , alors  $\Gamma_0(\mathbf{R})$  est vide et donc  $\tilde{\Gamma}(\mathbf{R})$  aussi. On obtient de la sorte (en considérant  $\tilde{\Gamma}$ ) pour tout  $g$  une