

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TOPOLOGIE DES COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN  
**Autor:** Gabard, Alexandre  
**Kapitel:** 2. La classification topologique des surfaces symétriques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64798>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Ce problème fut reposé par Gross et Harris en 1981 (cf. [GrHa], p. 177). Il revient à étudier les plongements possibles de  $C(\mathbf{R})$  dans une courbe plane  $C$  ; alors que le plongement de  $C(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  est la spécificité du 16<sup>e</sup> *problème de Hilbert*. Ce dernier est ouvert pour les degrés  $d \geq 8$ , et l'objet du présent exposé est de résoudre le *problème de Klein* pour tous les degrés.

L'exposé s'organise de la façon suivante :

- On commence par rappeler la classification topologique des surfaces symétriques en termes de trois invariants : le genre, le nombre de composantes fixes et l'alternative *séparante* ou non (la définition sera donnée au paragraphe suivant). Ensuite on va exhiber une *opération* qui permet de construire récursivement toutes les surfaces symétriques.
- Cette façon dynamique de penser aux surfaces symétriques va nous permettre de redémontrer le théorème de Klein : simplement en effectuant une «déformation» de courbes algébriques qui modélise l'opération topologique susmentionnée. Pour ce faire, on invoquera un résultat de l'école italienne dû à Brusotti, qui stipule que l'on peut «défaire» de façon indépendante les nœuds d'une courbe plane dont les seules singularités sont nodales. Cette preuve du théorème de Klein nous semble présenter l'avantage d'éviter tout transit superflu par les surfaces de Riemann : on préfère travailler directement sur leurs manifestations projectives.
- C'est alors seulement qu'on s'intéressera à la famille particularisée des courbes *planes* lisses, et ce en rappelant certains travaux de Rohlin, desquels résulte (entre autres) une restriction qui dit grosso modo qu'une courbe plane séparante possède beaucoup de composantes.
- Ensuite, quelques variations autour d'une méthode classique de Hilbert (originellement conçue pour la construction de courbes Harnack-maximales) vont nous permettre de construire des courbes planes qui réalisent tous les invariants non prohibés par Rohlin, obtenant ainsi une solution complète au problème de Klein.

## 2. LA CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES SURFACES SYMÉTRIQUES

On va d'abord classer les surfaces symétriques  $(X, \sigma)$  à *homéomorphisme équivariant* près (c'est la relation naturelle vu qu'un morphisme défini sur  $\mathbf{R}$  entre variétés algébriques réelles est équivariant pour les actions de Galois). On note  $g$  le genre de  $X$  et  $r$  le nombre de composantes de  $\text{Fix}(\sigma)$ , l'ensemble des points de  $X$  fixes par  $\sigma$ .

Comme  $\sigma$  renverse l'orientation, son action se linéarise au voisinage d'un point  $p \in \text{Fix}(\sigma)$  en une symétrie par rapport à une droite. Il en résulte que  $\text{Fix}(\sigma)$  est une sous-variété compacte de  $X$  de dimension 1 (et donc une réunion disjointe de cercles) et que le quotient par l'involution  $Y = X/\sigma$  est une *surface connexe à bord*, dont le bord s'identifie à  $\text{Fix}(\sigma)$ . (Le terme «surface à bord» est à comprendre ici au sens large: on autorise le bord à être vide, car il se peut très bien que  $\sigma$  soit sans point fixe).

Inversement une surface à bord  $Y$  détermine une surface symétrique en prenant son revêtement des orientations, d'où un dictionnaire entre surfaces symétriques et surfaces à bord.

De plus en relevant sur  $X$  une triangulation du quotient  $Y$ , on voit que  $\chi(X) = 2\chi(Y)$ , car la projection  $X \rightarrow Y$  est «plissée» le long des cercles invariants de caractéristique d'Euler nulle.

**LEMME 2.1.** *La surface privée des cercles invariants  $X \setminus \text{Fix}(\sigma)$  a au plus deux composantes connexes, et si elle en a deux elles sont échangées par  $\sigma$ .*

*Preuve.* Il suffit d'observer que la base du revêtement à 2 feuilles  $X \setminus \text{Fix}(\sigma) \rightarrow Y \setminus \partial Y$  est connexe, ce qui résulte du fait qu'une surface connexe à bord privée de son bord reste connexe.  $\square$

**PROPOSITION 2.2 (Borne de Harnack).** *Soit  $(X, \sigma)$  une surface symétrique, alors  $r \leq g + 1$ .*

*Preuve.* L'argument suivant est de Klein (cf. [K1], p.72). Par le lemme précédent, la surface  $X$  privée de tous les cercles invariants sauf un est encore connexe. Ainsi si  $r > g + 1$ , on pourrait effectuer  $g + 1$  coupures sur  $X$  sans la disconnecter, ce qui contredit la *définition de Riemann du genre* comme étant le nombre maximal de coupures non disconnectantes.  $\square$

Observer qu'un miroir sur une «somme connexe rectiligne» de  $g$  tores fournit une surface symétrique réalisant la borne de Harnack (Figure 1).

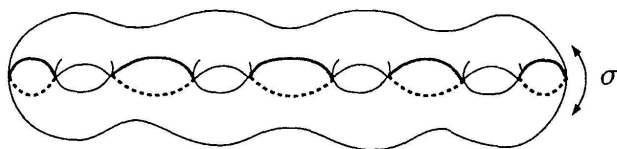


FIGURE 1

DÉFINITION (Klein). Une surface symétrique  $(X, \sigma)$  est *séparante* ( $a = 0$ ) si  $\text{Fix}(\sigma)$  disconnecte  $X$ , et *non-séparante* ( $a = 1$ ) sinon.

Notons qu'une surface symétrique avec  $r = g + 1$  cercles invariants, est nécessairement séparante. C'est immédiat avec la définition de Riemann du genre.

Observons aussi qu'une surface symétrique  $(X, \sigma)$  est séparante si et seulement si le quotient  $Y = X/\sigma$  est orientable. En effet dans le cas séparant, le quotient s'identifie à l'adhérence d'une des moitiés, et est donc orientable car plongé dans  $X$ . La réciproque est claire si on raisonne avec le revêtement des orientations.

PROPOSITION 2.3 (Congruence de Klein). Si  $(X, \sigma)$  est séparante, alors  $r \equiv g + 1 \pmod{2}$ .

*Preuve.* Le quotient  $Y$  est orientable et possède  $r$  composantes de bord, il est donc le résultat de l'excision de  $r$  disques ouverts disjoints dans une surface orientable sans bord de genre disons  $n \geq 0$ ; par suite  $\chi(Y) = (2 - 2n) - r$ . Or  $\chi(X) = 2 - 2g$ , et la relation  $\chi(X) = 2\chi(Y)$  donne  $1 - g = 2 - 2n - r$ , d'où  $r = g + 1 - 2n \equiv g + 1 \pmod{2}$ .  $\square$

En se servant du dictionnaire entre surfaces symétriques et surfaces à bord, et en se souvenant que ces dernières sont classées par 3 invariants qui sont la caractéristique d'Euler, le nombre de composantes de bord et l'orientabilité, on obtient le :

THÉORÈME 2.4 (Klein-Weichold). Deux surfaces symétriques sont équi-homéomorphes si et seulement si elles ont mêmes invariants  $(g, r, a)$ .

Nous allons montrer par des exemples que les restrictions recensées jusqu'ici sur les invariants  $(g, r, a)$  sont les seules. Pour l'instant leurs valeurs admissibles sont résumées par le *diagramme des involutions* (cf. Figure 2), qui pour une valeur fixée du genre comporte 2 « étages » : le premier correspond aux surfaces séparantes ( $a = 0$ ) et le second aux non-séparantes ( $a = 1$ ).

La combinatoire de ce diagramme (Figure 2) montre que l'opération numérique  $(g, r, a) \mapsto (g + 1, r + 1, a)$  fournit un mode de génération exhaustif des surfaces symétriques à partir des modèles minimaux symbolisés par des « pastilles noires » sur la Figure 2.

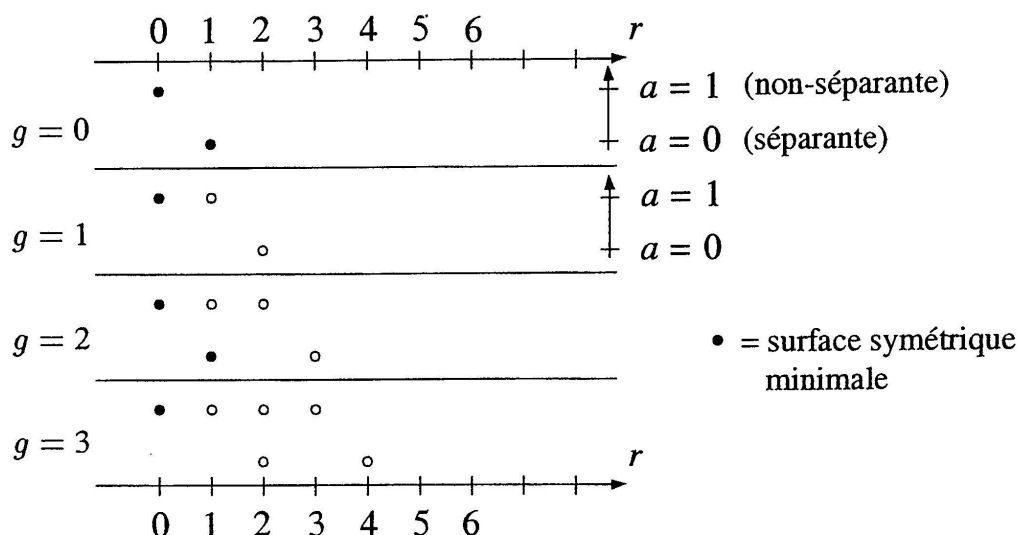


FIGURE 2

Cette opération n'est autre que l'*attachement d'une anse baguée*, dont voici la description : Soit  $(X, \sigma)$  une surface symétrique d'invariants  $(g, r, a)$ . On lui attache une anse baguée basée en deux points symétriques distincts  $p$  et  $p^\sigma$  de la surface (cf. Figure 3). On peut alors prolonger à l'anse l'involution donnée sur  $X$  en fixant exactement la bague, d'où une nouvelle surface symétrique d'invariants  $(g+1, r+1, a)$ . Noter que cette opération préserve bien l'invariant  $a$ , car elle revient à faire un trou (= exciser un disque ouvert) dans le quotient, ce qui préserve l'orientabilité.

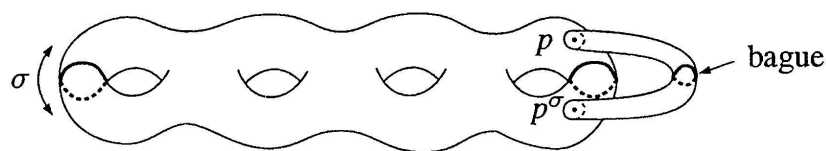


FIGURE 3

Les surfaces symétriques minimales relativement à cette opération sont :

1. Les non-séparantes, avec  $r = 0$ , qui s'obtiennent à partir de la *sphère antipodale* et du *tore antipodal* en leur attachant récursivement une « paire d'oreilles » (cf. Figure 4). En particulier on voit que, pour toutes les valeurs du genre, il existe une surface symétrique sans point fixe.

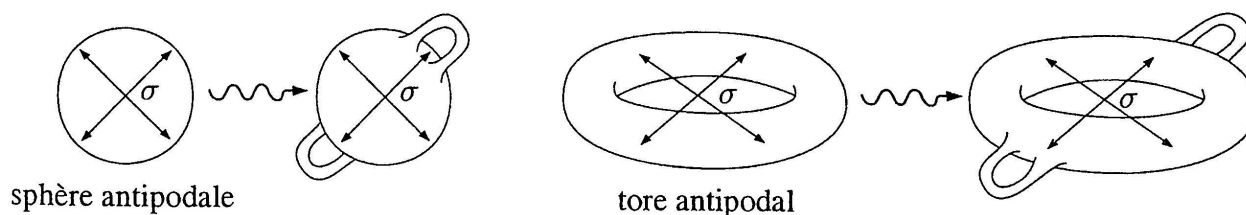


FIGURE 4

2. Les séparantes, avec  $r = 1$  et donc  $g \equiv 0 \pmod{2}$ , se déduisent de la *sphère équatoriale* en lui attachant récursivement une paire d'oreilles (cf. Figure 5).

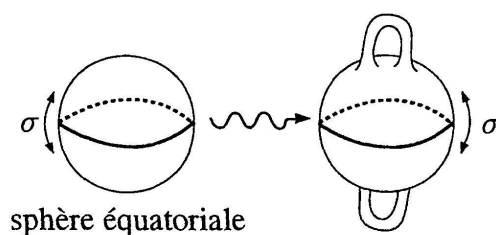


FIGURE 5

### 3. LES PETITES DÉFORMATIONS DES COURBES PLANES NODALES

Notre outil principal est le *théorème de Brusotti* sur l'indépendance de la simplification des nœuds (= points doubles ordinaires) des courbes planes (cf. [Br] ou [BR], pp. 269–275). On va en faire un double usage.

- D'abord pour faire du plan  $\mathbf{P}^2$  l'habitable de « déformations » explicites de courbes algébriques réelles, permettant en particulier de modéliser l'opération clé  $(g, r, a) \mapsto (g + 1, r + 1, a)$  pour la génération des surfaces symétriques, et d'obtenir ainsi une preuve « purement projective » du théorème de Klein relatif aux courbes « abstraites ».

- Et ensuite comme outil de *construction de courbes réelles lisses dans le plan*: la méthode consiste à se donner deux courbes réelles transverses de petits degrés (typiquement des droites et des coniques) dont la topologie est bien comprise, puis de « lissifier » la réunion de leurs parties réelles; le théorème de Brusotti assure alors l'existence d'une courbe algébrique réelle lisse dont la partie réelle réalise les lissifications prescrites. Cette remarquable flexibilité graphique des courbes planes réelles nodales (qui est essentiellement une conséquence du théorème de Riemann-Roch) va jouer un rôle crucial dans la partie constructive du problème de Klein.

THÉORÈME 3.1 (Brusotti 1921). • Soit  $\Gamma \subset \mathbf{P}^2$  une courbe plane de degré  $d$  (non nécessairement irréductible) dont les seules singularités sont des nœuds  $p_1, \dots, p_\delta$ . Alors pour tout choix de points doubles  $S \subset \{p_1, \dots, p_\delta\}$ , il existe une courbe plane  $\Delta$  de même degré  $d$  voisine de  $\Gamma$  qui simplifie les nœuds prescrits  $S$  et conserve les nœuds restants (modulo mouvements infinitésimaux).