

7. The Witt group of Laurent polynomials

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PROPOSITION 6.8. *Let A be a commutative semilocal ring in which 2 is invertible. Let (P, α) be a quadratic space over A . If (P, α) is isometric to $(P, t \cdot \alpha)$ over $A[t, t^{-1}]$, then (P, α) is hyperbolic.*

Proof. Let ξ be the class of (P, α) in $W(A)$. In $W'(A[t])$ we have $\xi = t \cdot \xi$. Applying *Res* to both sides we obtain $\xi = 0$. Since A is semilocal, by Witt's cancellation theorem we conclude that (P, α) is hyperbolic. $\square$

7. THE WITT GROUP OF LAURENT POLYNOMIALS

Let $W'(A[t, t^{-1}])$ be the group defined in the introduction.

THEOREM 7.1. *Let A be an associative ring with involution in which 2 is invertible. Let*

$$\varphi: W'(A[t, t^{-1}]) \rightarrow W(A[t, t^{-1}])$$

be the canonical homomorphism.

(a) *If $H^2(\mathbf{Z}/2, K_{-1}(A)) = 0$, then φ is surjective.*

(b) *If $K_0(A) = K_0(A[t]) = K_0(A[t, t^{-1}])$, then φ is an isomorphism.*

Proof of (a). Corollary 2.4 implies that

$$H^2(\mathbf{Z}/2, K_0(A[t, t^{-1}])/K_0(A)) = 0.$$

This means that every projective $A[t, t^{-1}]$ -module P is in the same class as some projective module of the form

$$P_0[t, t^{-1}] \oplus Q \oplus Q^*,$$

where P_0 is a projective A -module. Therefore, adding to a space (P, α) a hyperbolic space $H(Q')$ with $Q \oplus Q'$ free, we may assume that P is of the form $P_0[t, t^{-1}]$. This means precisely that the class of (P, α) is in the image of $W'(A[t, t^{-1}])$. $\square$

Proof of (b). Surjectivity is obvious, because by assumption every projective $A[t, t^{-1}]$ -module is stably extended from A . Suppose that the class of a space $(P_0[t, t^{-1}], \alpha)$ vanishes in $W(A[t, t^{-1}])$. This means that, for some Q and R , there exists an isometry

$$(P_0[t, t^{-1}], \alpha) \perp H(Q) \simeq H(R).$$

Adding to both sides a suitable $H(A[t, t^{-1}]^n)$ we may replace Q and R by extended modules $Q_0[t, t^{-1}]$ and $R_0[t, t^{-1}]$. Then the isometry means precisely that the class of $(P_0[t, t^{-1}], \alpha)$ vanishes in $W'(A[t, t^{-1}])$. $\square$

We can restate assertion (b) of Theorem 7.1 as follows.

THEOREM 7.2. *Let A be an associative ring with involution, in which 2 is invertible. Assume that $K_0(A) = K_0(A[t]) = K_0(A[t, t^{-1}])$. Then there exists a natural homomorphism Res such that the sequence*

$$0 \rightarrow W(A) \rightarrow W(A[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\text{Res}} W(A) \rightarrow 0$$

is split exact. The homomorphism Res restricts to an isomorphism of $t \cdot W(A)$ onto $W(A)$.

8. TWO COUNTEREXAMPLES

In this section we show that the map $W'(A[t, t^{-1}]) \rightarrow W(A[t, t^{-1}])$, in general, is neither surjective nor injective.

EXAMPLE 8.1. We first recall the Mayer-Vietoris sequence associated to a cartesian square of commutative rings (see [1], Ch. IX, Corollary 5.12). Let

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \bar{R} & \longrightarrow & \bar{S} \end{array}$$

be a cartesian diagram of commutative rings, with f or g surjective. Denote by $\widetilde{K}_0$ the kernel of the rank function on K_0 . Then there is a commutative diagram with exact rows

$$\begin{array}{ccccccccc} K_1(\bar{R}) \times K_1(S) & \longrightarrow & K_1(\bar{S}) & \longrightarrow & \widetilde{K}_0(R) & \longrightarrow & \widetilde{K}_0(\bar{R}) \times \widetilde{K}_0(S) & \longrightarrow & \widetilde{K}_0(\bar{S}) \\ \downarrow \det & & \downarrow \det & & \downarrow \wedge^{\max} & & \downarrow \wedge^{\max} & & \downarrow \wedge^{\max} \\ \mathbf{G}_m(\bar{R}) \times \mathbf{G}_m(S) & \longrightarrow & \mathbf{G}_m(\bar{S}) & \longrightarrow & \text{Pic}(R) & \longrightarrow & \text{Pic}(\bar{R}) \times \text{Pic}(S) & \longrightarrow & \text{Pic}(\bar{S}) \end{array}$$

Let A be the local ring at the origin of the complex plane curve $Y^2 = X^2 - X^3$, $\tilde{A}$ the normalisation of A and $\mathfrak{c}$ the conductor of $\tilde{A}$ in A . Applying the big diagram above to the cartesian squares

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \tilde{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A/\mathfrak{c}) & \longrightarrow & (\tilde{A}/\mathfrak{c}) \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} A[t, t^{-1}] & \longrightarrow & \tilde{A}[t, t^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A/\mathfrak{c})[t, t^{-1}] & \longrightarrow & (\tilde{A}/\mathfrak{c})[t, t^{-1}] \end{array}$$