

§5. Appendix

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§5. APPENDIX

Here we outline a simple proof of the L^p -isomorphism theorem stated in §2; the proof uses the notion of type and cotype of Banach spaces and follows [C].

DEFINITION. A Banach space E is of *type* p ($1 \leq p \leq 2$) if there is a finite positive number C_p such that for all choices of x_1, \dots, x_n in E , $n = 1, 2, \dots$, we have

$$2^{-n} \sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\| \leq C_p \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p},$$

where $\sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}$ stands for the sum of the 2^n quantities obtained by letting each ε_j taking the values $+1$ or -1 . E is said to have *exact type* p if it is of type p but not of type $\tilde{p} > p$.

A Banach space E is of *cotype* q ($2 \leq q \leq \infty$) if there is a finite positive number c_q such that for all choices of x_1, \dots, x_n in E , $n = 1, 2, \dots$, we have

$$2^{-n} \sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\| \geq c_q \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{1/q}.$$

E is said to have *exact cotype* q if it is of cotype q but not of cotype $\tilde{q} < q$.

It is obvious that exact type or cotype is an isomorphism invariant. It can be shown that for any measure space (X, Σ, μ) giving rise to infinite dimensional $L^p(\mu)$ -spaces we have the following:

- $L^p(\mu)$ has exact type p if $1 \leq p \leq 2$, exact type 2 if $2 \leq p < \infty$ and exact type 1 if $p = \infty$;
- $L^p(\mu)$ has exact cotype 2 if $1 \leq p \leq 2$, exact cotype p if $2 \leq p < \infty$ and exact cotype ∞ if $p = \infty$.

All this and more is completely proved in [C]; a reference for the general theory of types and cotypes is [DJT].

Suppose now that $L^p(\mu)$ and $L^q(\nu)$ are infinite dimensional and isomorphic where $1 \leq p, q \leq \infty$, $(X, \Sigma, \mu), (Y, \mathcal{J}, \nu)$ being any two measure spaces; we shall prove that $p = q$. Without loss of generality, we may suppose that if $p \neq q$ then $p < q$; this would lead to a contradiction as shown below.

(i) If $1 \leq p < q \leq 2$ then

exact type of $L^p(\mu) = p <$ exact type of $L^q(\nu) = q$,

which excludes any isomorphism between $L^p(\mu)$, $L^q(\nu)$.

(ii) If $1 \leq p < 2$, $2 \leq q < \infty$ then

exact type of $L^p(\mu) = p <$ exact type of $L^q(\nu) = 2$,

which excludes any isomorphism between $L^p(\mu)$, $L^q(\nu)$.

(iii) If $2 \leq p < q < \infty$ then $1 < q' < p' \leq 2$; if $L^p(\mu)$, $L^q(\nu)$ were isomorphic then their duals $L^{p'}(\mu)$, $L^{q'}(\nu)$ would be isomorphic, which is impossible in view of (i).

(iv) If $1 < p < \infty$, $q = \infty$ then $L^p(\mu)$ has exact type equal to $\min(p, 2) > 1$ whereas $L^\infty(\nu)$ has exact type 1; thus $L^p(\mu)$ is not isomorphic to $L^\infty(\nu)$ (a fact which is obvious on the grounds of reflexivity as well).

(v) Finally, let $p = 1$, $q = \infty$; then $L^1(\mu)$ is not isomorphic to $L^\infty(\nu)$ since the exact cotype of $L^1(\mu)$ is 2 and the exact cotype of $L^\infty(\nu)$ is ∞ .

This completes the proof of the L^p -isomorphism theorem.

A proof that no infinite dimensional $L^1(\mu)$ can be isomorphic to any $C_0(Y)$ or $C(Y)$ (Y any locally compact Hausdorff space) can be based on the same ideas as (v) above. The exact cotype of $L^1(\mu)$ is 2 whereas the exact cotype of any infinite dimensional $C_0(Y)$ or $C(Y)$ is ∞ (exactly as in the case of $L^\infty(\mu)$). This excludes the possibility of any isomorphism between $L^1(\mu)$ and $C_0(Y)$ or $C(Y)$.

REMARK. The L^p -isomorphism theorem seems to be known to various specialists; however, I know of no explicit formulation or proof of it in complete generality except for that in [C].

REFERENCES

- [C] CHATTERJI, S. D. Measure theory and probability theory. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, Supplemento Vol. XLVI* (1998), 151–169.
- [DS] DUNFORD, N. and J. T. SCHWARTZ. *Linear Operators*, vol. 1. Interscience Publishers, New York, 1958.
- [DJT] DIESTEL, J., JARCHOW, H. and A. TONGE. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.