4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^\infty e^{-t}\langle f, \tau_{-t}g\rangle\, dt\,;$$

cela nous donne $E' = W^{-m}(W^m(E'))$; on applique alors le théorème 2 et la proposition 1 pour obtenir $E = W^m(W^{-m}(E))$ et $E' = W^m(W^{-m}(E'))$. Il nous reste à vérifier la propriété (5). Pour $m > k$, on applique la première partie de la preuve à l'espace $W^{m-k}(E)$, ainsi que la proposition 1; il vient

$$W^{m-k}(E) = W^{-k}\left(W^k(W^{m-k}(E))\right) = W^{-k}(W^m(E))\,;$$

par ailleurs:

$$W^{m-k}(E) = W^{m-k}\left(W^k(W^{-k}(E))\right) = W^m(W^{-k}(E))\,.$$

Le cas $m < k$ se traite de manière analogue. Le même raisonnement s'applique à E'.

REMARQUE. Le théorème 3 se retrouve aussi dans le cadre des C_0-groupes ([1], théorème 3.3.23).

4. RÉSULTATS NÉGATIFS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES

4.1 LA PROPRIÉTÉ DE MITIAGIN-ORNSTEIN

DÉFINITION 3. Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. On dit que E *possède la propriété de Mitiagin-Ornstein* si, pour toute distribution f, les conditions $\partial_j^k f \in E$ $(j = 1, 2\,;\ k = 0, 1, 2)$ impliquent $\partial_1\partial_2 f \in E$.

PROPOSITION 5. *Si E est un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, alors $W^1(E)$ possède la propriété de Mitiagin-Ornstein.*

Preuve. Supposons $\partial_j^k f \in W^1(E)$, pour $j = 1, 2$ et $k = 0, 1, 2$. On a en particulier $\partial_2 f \in W^1(E)$, d'où $\partial_1\partial_2 f \in E$. La condition $\partial_1^2 f \in W^1(E)$ implique

$$\partial_1(\partial_1\partial_2 f) = \partial_2(\partial_1^2 f) \in E\,;$$

on obtient de même $\partial_2(\partial_1\partial_2 f) \in E$. Ainsi $\partial_1\partial_2 f$ appartient à $W^1(E)$.

4.2 Preuve du théorème 1

Nous procéderons en trois étapes.

1. Les espaces $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ ne possèdent pas la propriété de Mitiagin-Ornstein (voir [5] et [6], ainsi que l'article de Boman [2]). D'après la proposition 5, cela suffit pour établir que $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ sont des sous-espaces propres de $W^1(W^{-1}(L^1(\mathbf{R}^2)))$ et $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$ respectivement.

2. Pour vérifier la propriété (i) en dimension $n \geq 3$, on considère

$$u \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^2)$$

et v une fonction non nulle appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n-2})$. On voit aisément que la fonction $f = u \otimes v$ vérifie

$$f \in W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \setminus L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

La propriété (iii) se prouve de la même façon.

3. On applique enfin le théorème 2 et la proposition 1, pour en déduire (ii) et (iv).

4.3 Contre-exemples explicites

Nous allons voir qu'il est possible de produire des contre-exemples pour les non-inclusions (i) et (ii) sans invoquer le théorème de Mitiagin. Il est clair qu'il suffit de travailler en dimension 2.

Soit

$$u(x,y) = 2x - x\log(x^2+y^2) - 2y\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

On a $u \in L^\infty_{loc}$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\log(x^2+y^2);$$

si on pose $f(x,y) = -\rho(x,y)\log(x^2+y^2)$, il vient

$$f = \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} - u\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

de sorte que f appartient à $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Soient

$$v(x,y) = -2\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad w(x,y) = -\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y)\log(x^2+y^2).$$

Les fonctions v et w appartiennent à L^∞ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w - v\frac{\partial \rho}{\partial y},$$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Un calcul analogue montre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ appartient à $W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Finalement f appartient à $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^2)))$ mais non à $L^\infty(\mathbf{R}^2)$.

Soit g une fonction intégrable positive telle que

$$\int_{\mathbf{R}^2} fg = +\infty,$$

par exemple $g(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{(x^2+y^2)\log^2(x^2+y^2)}$. Si l'on avait $g \in W^{-1}(W^1(L^1))$, la proposition 4 et le théorème 2 nous donneraient

$$|\langle g, \varphi_k * f\rangle| \leq \|\varphi_k * f\|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))}\|g\|_{W^{-1}(W^1(L^1))},$$

d'où

$$\int g\,(\varphi_k * f) \leq \|f\|_{W^1(W^{-1}(L^\infty))}\|g\|_{W^{-1}(W^1(L^1))};$$

puisque $\varphi_k * f$ tend vers f presque partout, le lemme de Fatou nous conduirait à :

$$\int fg < +\infty,$$

ce qui contredit le choix de g.

4.4 Les plongements de Sobolev sous-jacents

La non-inclusion $L^1(\mathbf{R}^2) \not\subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^2))\big)$ peut s'interpréter de manière fort élémentaire en la factorisant à travers des plongements de Sobolev. On commence par observer que

$$W^1(L^1(\mathbf{R}^2)) \subset L^2(\mathbf{R}^2) \tag{7}$$

(ceci parce que $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; voir par exemple [7], chapitre 5, théorème 2). On dispose en fait d'un plongement de Sobolev un peu plus général que (7), à savoir :

$$BV(\mathbf{R}^2) \subset L^2(\mathbf{R}^2);$$

$BV(\mathbf{R}^2)$ est l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont des mesures bornées sur $\mathbf{R}^2$. Dès lors l'inclusion

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^2))\big)$$

impliquerait *a fortiori*

$$L^1(\mathbf{R}^2) \subset W^{-1}\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big)\,,$$

ou encore, en passant aux duaux :

$$W^1\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big) \subset L^\infty(\mathbf{R}^2)\,;$$

or $W^1\big(L^2(\mathbf{R}^2)\big)$ est l'espace de Sobolev critique, qui s'injecte dans $BMO(\mathbf{R}^2)$ et non dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$.

5. POUR ALLER PLUS LOIN

Depuis les travaux de Stein et Weiss, l'espace de Hardy $H^1(\mathbf{R}^n)$ et son dual $BMO(\mathbf{R}^n)$ sont considérés comme des substituts naturels de $L^1(\mathbf{R}^n)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. $BMO(\mathbf{R}^n)$ n'est pas, à proprement parler, un EBD puisque, pour sa norme naturelle, c'est un espace de Banach de fonctions modulo les constantes. Aussi allons-nous considérer les *versions locales* de ces espaces fonctionnels, introduites par D. Goldberg [4] sous les notations $h^1(\mathbf{R}^n)$ et $bmo(\mathbf{R}^n)$ et rattachés depuis à la grande famille des espaces de Lizorkin-Triebel ; on a en effet $h^1(\mathbf{R}^n) = F^0_{12}(\mathbf{R}^n)$ et $bmo(\mathbf{R}^n) = F^0_{\infty 2}(\mathbf{R}^n)$ (voir [8]). Puisque les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro sont bornés sur les F^s_{pq}, on obtient $W^m(E) = (I-\Delta)^{-m/2}(E)$ pour $E = h^1(\mathbf{R}^n)$ et $E = bmo(\mathbf{R}^n)$, de sorte que les échelles de Sobolev ayant ces deux espaces pour origine sont invariantes. Cela va nous conduire à une version précisée du théorème 1 :

THÉORÈME 4. *Pour $n > 1$, on a :*

$$L^\infty(\mathbf{R}^n) \subset W^1\big(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n))\big) \subset bmo(\mathbf{R}^n)\,,$$

$$h^1(\mathbf{R}^n) \subset W^{-1}\big(W^1(L^1(\mathbf{R}^n))\big) \subset L^1(\mathbf{R}^n)\,,$$

et ces quatre inclusions sont strictes.

Preuve. Compte tenu des théorèmes 1 et 2, il suffira d'établir que $h^1(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace propre de $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$. Quelques rappels sur h^1 seront