2.4 Les $D(R^n)$ -modules invariants par translation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

2.4 Les $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$-modules invariants par translation

Nous allons voir que l'identité (6) est vérifiée pour une classe assez vaste d'EBD invariants par translation.

On dit que E est un $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$*-module* si, pour tous $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $f \in E$, on a $gf \in E$. Notons qu'alors l'opérateur linéaire $f \mapsto gf$ est borné sur E et donc que la fonction g admet une norme en tant que *multiplicateur ponctuel* de E :

$$\|g\|_{M(E)} = \sup\{\|gf\|_E \,:\, \|f\|_E \leq 1\}\,.$$

Théorème 2. *Soit E un EBD satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

(P_0) *$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace dense de E ;*

(P_1) *pour tout $f \in E$ et $t \in \mathbf{R}^n$, on a $\tau_t f \in E$ et $\|\tau_t f\|_E = \|f\|_E$;*

(P_2) *E est un $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$-module et, pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, on a :*

$$\sup_{\lambda \geq 1} \|h_\lambda g\|_{M(E)} < +\infty\,.$$

Alors, pour $m \in \mathbf{Z}$,

1. *E' possède les propriétés (P_1) et (P_2);*
2. *$W^m(E)$ possède les propriétés (P_0), (P_1) et (P_2);*
3. *$\big(W^m(E)\big)' = W^{-m}(E')$.*

Preuve. Le fait que E' et $W^m(E)$ possèdent les propriétés (P_1) et (P_2) se vérifie sans difficulté. La preuve de la seconde assertion repose sur les résultats classiques suivants :

Lemme 1. *Si E vérifie (P_0) et (P_1), alors, pour tous $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $f \in E$, on a $g * f \in E$ et $\|g*f\|_E \leq \|g\|_1 \|f\|_E$; la même estimation est satisfaite dans E' et dans $W^m(E)$ $(m \in \mathbf{Z})$.*

Lemme 2. *Sous les hypothèses du théorème 2, on a, pour tous $f \in E$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$,*

$$\lim_{k \to +\infty} f(h_k g) = g(0) f \qquad et \qquad \lim_{k \to +\infty} k^n (h_{1/k} g) * f = \left(\int g(x)dx\right) f$$

dans l'espace de Banach E.

A l'aide du lemme 2, on montre aisément que, pour $f \in W^m(E)$,

$$\lim_{k \to +\infty} f\rho_k = f\,, \qquad \lim_{k \to +\infty} \varphi_k * f = f$$

en norme $W^m(E)$; la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $W^m(E)$ en découle aussitôt.

Il reste à prouver l'inclusion $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$, pour $m > 0$. Soit f une distribution à support compact appartenant à $W^m(E')$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; en appliquant la proposition 4 à $f * \varphi_k$ et g, on obtient :

$$|\langle f * \varphi_k, g\rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)} ;$$

puisque $\widetilde{\varphi}_k * g \to g$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, il vient

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)} ,$$

autrement dit $f \in W^{-m}(E)'$. Si f est un élément quelconque de $W^m(E')$, on approche f par les $f\rho_k$ et on conclut comme ci-dessus.

REMARQUE. L'étude de la dualité des $W^m(E)$ peut se conduire dans le cadre plus général de l'échelle de Sobolev associée à un C_0-groupe (voir le chapitre III de [1], notamment le théorème 3.3.28).

3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN

THÉORÈME 3. *Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, ayant les propriétés* (P_0) *et* (P_1)*; soit $m > 0$. Alors*

$$E = W^{-m}(W^m(E)) , \quad E' = W^{-m}(W^m(E')) .$$

Si de plus E satisfait (P_2)*, alors les échelles de Sobolev d'origines E et E' sont invariantes.*

Preuve. D'après le lemme 1, l'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t} \tau_t f \, dt$$

est borné sur E. Puisque $(Tf)' = f - Tf$ pour $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, la même propriété est vraie au sens des distributions quel que soit $f \in E$. On en déduit aussitôt que T^m est un opérateur borné de E dans $W^m(E)$. Si $f \in E$ et $g = T^m(f)$, il vient

$$f = \sum_{j=0}^{m} C_m^j g^{(j)} ,$$

de sorte que f appartient à $W^{-m}(W^m(E))$. On peut aussi définir T sur E', à l'aide de la formule