

## 2.4 Les $D(\mathbb{R}^n)$ -modules invariants par translation

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2.4 LES  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -MODULES INVARIANTS PAR TRANSLATION

Nous allons voir que l'identité (6) est vérifiée pour une classe assez vaste d'EBD invariants par translation.

On dit que  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -module si, pour tous  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  et  $f \in E$ , on a  $gf \in E$ . Notons qu'alors l'opérateur linéaire  $f \mapsto gf$  est borné sur  $E$  et donc que la fonction  $g$  admet une norme en tant que *multiplicateur ponctuel* de  $E$  :

$$\|g\|_{M(E)} = \sup\{\|gf\|_E : \|f\|_E \leq 1\}.$$

THÉORÈME 2. Soit  $E$  un EBD satisfaisant les trois propriétés suivantes :

(P<sub>0</sub>)  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  est un sous-espace dense de  $E$  ;

(P<sub>1</sub>) pour tout  $f \in E$  et  $t \in \mathbf{R}^n$ , on a  $\tau_t f \in E$  et  $\|\tau_t f\|_E = \|f\|_E$  ;

(P<sub>2</sub>)  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ -module et, pour tout  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , on a :

$$\sup_{\lambda \geq 1} \|h_\lambda g\|_{M(E)} < +\infty.$$

Alors, pour  $m \in \mathbf{Z}$ ,

1.  $E'$  possède les propriétés (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) ;
2.  $W^m(E)$  possède les propriétés (P<sub>0</sub>), (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) ;
3.  $(W^m(E))' = W^{-m}(E')$ .

*Preuve.* Le fait que  $E'$  et  $W^m(E)$  possèdent les propriétés (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) se vérifie sans difficulté. La preuve de la seconde assertion repose sur les résultats classiques suivants :

LEMME 1. Si  $E$  vérifie (P<sub>0</sub>) et (P<sub>1</sub>), alors, pour tous  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  et  $f \in E$ , on a  $g * f \in E$  et  $\|g * f\|_E \leq \|g\|_1 \|f\|_E$  ; la même estimation est satisfaite dans  $E'$  et dans  $W^m(E)$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ).

LEMME 2. Sous les hypothèses du théorème 2, on a, pour tous  $f \in E$  et  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(h_k g) = g(0)f \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} k^n (h_{1/k} g) * f = \left( \int g(x) dx \right) f$$

dans l'espace de Banach  $E$ .

A l'aide du lemme 2, on montre aisément que, pour  $f \in W^m(E)$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f \rho_k = f, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k * f = f$$

en norme  $W^m(E)$ ; la densité de  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  dans  $W^m(E)$  en découle aussitôt.

Il reste à prouver l'inclusion  $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$ , pour  $m > 0$ . Soit  $f$  une distribution à support compact appartenant à  $W^m(E')$  et  $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ; en appliquant la proposition 4 à  $f * \varphi_k$  et  $g$ , on obtient :

$$|\langle f * \varphi_k, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)};$$

puisque  $\tilde{\varphi}_k * g \rightarrow g$  dans  $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ , il vient

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)},$$

autrement dit  $f \in W^{-m}(E)'$ . Si  $f$  est un élément quelconque de  $W^m(E')$ , on approche  $f$  par les  $f\rho_k$  et on conclut comme ci-dessus.

REMARQUE. L'étude de la dualité des  $W^m(E)$  peut se conduire dans le cadre plus général de l'échelle de Sobolev associée à un  $C_0$ -groupe (voir le chapitre III de [1], notamment le théorème 3.3.28).

### 3. RÉSULTATS POSITIFS EN DIMENSION UN

THÉORÈME 3. Soit  $E$  un EBD dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ , ayant les propriétés  $(P_0)$  et  $(P_1)$ ; soit  $m > 0$ . Alors

$$E = W^{-m}(W^m(E)), \quad E' = W^{-m}(W^m(E')).$$

Si de plus  $E$  satisfait  $(P_2)$ , alors les échelles de Sobolev d'origines  $E$  et  $E'$  sont invariantes.

Preuve. D'après le lemme 1, l'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t\tau_t} f dt$$

est borné sur  $E$ . Puisque  $(Tf)' = f - Tf$  pour  $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ , la même propriété est vraie au sens des distributions quel que soit  $f \in E$ . On en déduit aussitôt que  $T^m$  est un opérateur borné de  $E$  dans  $W^m(E)$ . Si  $f \in E$  et  $g = T^m(f)$ , il vient

$$f = \sum_{j=0}^m C_m^j g^{(j)},$$

de sorte que  $f$  appartient à  $W^{-m}(W^m(E))$ . On peut aussi définir  $T$  sur  $E'$ , à l'aide de la formule