4. Feuilletages sur le plan projectif

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Remarquons que dans cette preuve on a utilisé seulement le fait que Φ est un courant positif fermé $\mathcal{F}$-invariant et numériquement effectif; sa provenance d'une courbe entière est inessentielle. Remarquons aussi (voir [De2]) que l'effectivité numérique est automatique si $\Phi_{alg} = 0$.

Les théorèmes 1 et 2 et la relation $K_X = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}}$, où K_X est le fibré canonique de X, impliquent:

COROLLAIRE 1. $c_1(X) \cdot [\Phi] \geq 0$. □

Si Φ était une courbe algébrique lisse D on aurait la formule d'adjonction $c_1(X) \cdot [D] = [D]^2 + \chi(D)$ et le corollaire serait conséquence de $[D]^2 \geq 0$ (effectivité numérique) et $\chi(D) \geq 0$ (inégalité tautologique). Naïvement, dans tout ce qui précède on a donc remplacé la formule d'adjonction par sa version feuilletée $c_1(X) = c_1(N_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})$, $[D]^2$ par $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$, et $\chi(D)$ par $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$.

COROLLAIRE 2. *X n'est pas de type général.* □

En effet, le fibré canonique d'une surface de type général est presque ample (i.e., ample hors d'une collection finie de courbes rationnelles d'auto-intersection négative, qui sont négligeables car contractibles), et donc ([Mc]) on aurait $c_1(X) \cdot [\Phi] < 0$.

Ceci permet d'éviter, dans la preuve de McQuillan de la conjecture de Green-Griffiths, le recours au théorème de semi-positivité générique de Miyaoka [Mi]. Pour prouver cette conjecture McQuillan considère une courbe entière $f_0 \colon \mathbf{C} \to X_0$ à valeurs dans une surface de type général. Si $c_1^2(X_0) > c_2(X_0)$, il construit un revêtement ramifié $X \to X_0$ sur lequel le relevé $f \colon \mathbf{C} \to X$ est tangente à un feuilletage à singularités réduites. Puisque X est encore de type général, le corollaire 2 implique que f, et donc f_0, est dégénérée.

4. FEUILLETAGES SUR LE PLAN PROJECTIF

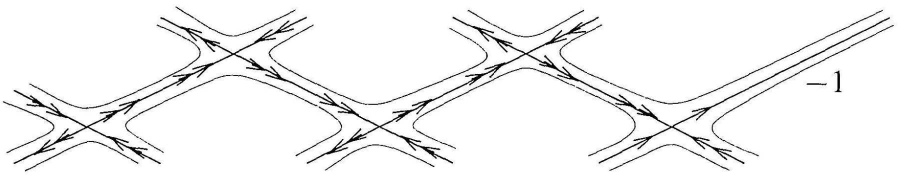
Dans cette dernière section nous allons démontrer le théorème énoncé dans l'introduction. Soit donc $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de $\mathbf{CP}^2$ dont toutes les singularités sont non nilpotentes. On a $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(1-d)$ et $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(2+d)$, où (par définition) d est le degré de $\mathcal{F}$.

Certaines singularités peuvent ne pas être réduites, notamment celles engendrées par un champ de vecteurs dont la partie linéaire admet les valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbf{Q}^+$. Si $\lambda \notin \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$ la singularité est linéarisable, si au contraire $\lambda \in \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$ sa forme normale (Poincaré-Dulac, voir [CS]) est

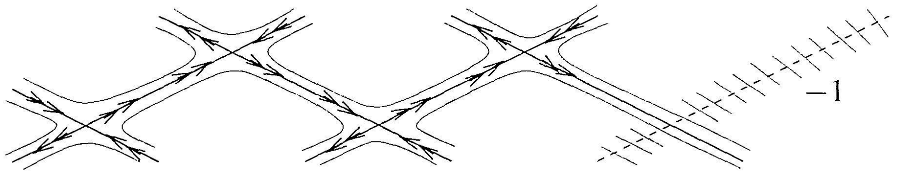
$$(nz + aw^n)\, dw - w\, dz = 0$$

où $a \in \{0, 1\}$ et $n \in \{\lambda, \frac{1}{\lambda}\} \cap \mathbf{N}^+$.

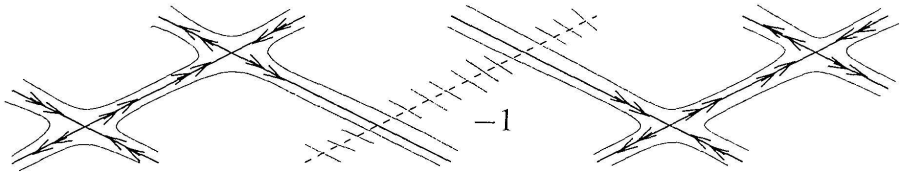
Soit donc $X \xrightarrow{\pi} \mathbf{CP}^2$ la résolution (minimale) de ces singularités. Un calcul simple et explicite montre que chaque composante connexe du diviseur exceptionnel de π est une chaîne de courbes rationnelles qui contient une (-1)-courbe qui est soit invariante par le feuilletage relevé $\mathcal{G}$ (cas non linéarisable) soit transverse à ce même feuilletage (cas linéarisable). Les autres courbes de la chaîne sont $\mathcal{G}$-invariantes.



$\lambda \in \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$, $a = 1$



$\lambda \in \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$, $a = 0$



$\lambda \notin \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$

Décomposons le diviseur exceptionnel de π comme $F \cup D$, où $F = \bigcup_{j=1}^{l} F_j$ est l'union des (-1)-courbes qui ne sont pas $\mathcal{G}$-invariantes. On a alors [Br]

$$T_{\mathcal{G}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(F)$$
$$N_{\mathcal{G}} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(-2F - D)\,.$$

Soit $\Psi \in A^{1,1}(X)'$ le courant positif fermé engendré par le relevé de $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{CP}^2$ sur X. On suppose que f n'est pas dégénérée, et on normalise Ψ de manière telle que $c_1\big(\pi^*(\mathcal{O}(1))\big) \cdot [\Psi] = 1$. On obtient alors

$$c_1(T_{\mathcal{G}}) \cdot [\Psi] = 1 - d + \sum_{j=1}^{l} [F_j] \cdot [\Psi]$$

$$c_1(N_{\mathcal{G}}) \cdot [\Psi] \leq 2 + d - 2 \sum_{j=1}^{l} [F_j] \cdot [\Psi]$$

(car $[\Psi] \cdot [D] \geq 0$), et les théorèmes 1 et 2 impliquent

$$\sum_{j=1}^{l} [F_j] \cdot [\Psi] \geq d - 1$$

$$2 \sum_{j=1}^{l} [F_j] \cdot [\Psi] \leq d + 2$$

et enfin

$$d \leq 4 .$$

Ce qui prouve le théorème.

REMARQUE. Sans hypothèse sur les singularités de $\mathcal{F}$ le théorème devient évidemment faux, on peut par contre espérer affaiblir l'hypothèse $d \geq 5$ (par $d \geq 2$?).

RÉFÉRENCES

[Br] BRUNELLA, M. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30* (1997), 569–594.

[CS] CAMACHO, C. et P. SAD. Pontos singulares de equacões diferenciais analíticas. In: *16º Coloquio Brasileiro de Matemática.* IMPA, 1987.

[De1] DEMAILLY, J.-P. Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques. *Gaz. Math. 73* (1997), 3–23.

[De2] —— Courants positifs fermés et théorie de l'intersection. *Gaz. Math. 53* (1992), 131–159.

[GG] GREEN, M. and P. GRIFFITHS. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In: *The Chern Symposium 1979.* Springer (1980), 41–74.

[Jo] JOUANOLOU, J.-P. Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. *Math. Ann. 232* (1978), 239–245.

[LN] LINS NETO, A. Simultaneous uniformization for the leaves of projective foliations by curves. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 25* (1994), 181–206.

[MR] MARTINET, J. et J.-P. RAMIS. Problèmes de modules pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre. *Publ. IHES 55* (1982), 63–164.