

# 1.6 Cas d'un tableau critique récurrent persistant

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On montre à présent que le bout de  $x$  contient une copie conforme de chaque anneau du bout critique et que ces copies sont disjointes. Ceci entraîne que, si la somme des modules est infinie pour le bout critique, elle l'est aussi pour le bout de  $x$ .

Soit  $p$  la profondeur critique maximale dans la colonne 0 de  $T(x)$ . Pour  $i < p$ , l'anneau  $A_i(x)$  coïncide avec  $A_i(x_0)$ . Pour  $i \geq p$ , on regarde dans  $T(x)$  la première pièce critique qu'on rencontre après la colonne 0 sur la ligne  $i+1$ . Si  $(i+1, j)$ ,  $j > 0$ , sont les coordonnées de ce terme, le lemme 1.24 (appliqué à la ligne  $i+1$  et à la diagonale  $\mathcal{D}$  issue de  $(i+1, 0)$ ) montre que l'anneau  $A_{i+j}(x)$  est conforme à  $A_i(x_0)$ . Comme, par construction,  $j$  croît avec  $i$  (au sens large), les copies conformes qu'on obtient sont disjointes.  $\square$

La proposition ci-dessous résume les trois lemmes précédents.

**PROPOSITION 1.28.** *Soit  $x$  un point de  $K(f)$  et  $\Gamma$  un graphe admissible qui bague le point critique  $x_0$  et bague infiniment le point  $x$ . Pour que l'impression  $\text{Imp}(x)$  soit réduite au point  $x$ , il suffit que l'une des conditions suivantes soit remplie :*

- $T(x)$  est non récurrent ou récurrent non persistant ;
- $T(x)$  est récurrent persistant mais  $T(x_0)$  ne l'est pas.

*De plus, dès que  $T(x)$  est récurrent persistant, le point critique  $x_0$  est infiniment bague par  $\Gamma$ .*

Les lemmes 1.30, 1.36 et 1.37 du paragraphe suivant règlent le cas où  $T(x_0)$  est récurrent persistant, le point  $x_0$  étant infiniment bague par  $\Gamma$ .

## 1.6 CAS D'UN TABLEAU CRITIQUE RÉCURRENT PERSISTANT

Dans toute cette partie, on suppose que  $\Gamma$  est un graphe admissible qui bague infiniment le point critique  $x_0$ .

**DÉFINITION 1.29.** On dit que le tableau critique  $T(x_0)$  est *périodique* s'il contient une colonne, autre que la colonne 0, entièrement formée de pièces critiques. Les indices de ces colonnes totalement critiques sont alors les multiples d'un entier  $k$  qu'on appelle *période* de  $T(x_0)$ . En fait, le tableau  $T(x_0)$  est périodique de période  $k$  si et seulement si le bout du point critique  $x_0$  est périodique de période  $k$ .

LEMME 1.30. *Si le tableau  $T(x_0)$  du point critique est récurrent persistant mais non périodique, la somme des modules des anneaux du bout critique est infinie.*

Le problème des anneaux critiques est qu'ils ont un module inférieur de moitié à celui de leur image. Afin de compenser cette perte, on va trouver, pour "chaque" anneau non dégénéré  $A_p(x_0)$ , deux anneaux distincts de profondeur plus grande,  $A_i(x_0)$  et  $A_j(x_0)$ ,  $i, j > p$ , qui revêtent doublement  $A_p(x_0)$  par un itéré de  $f$ .

DÉFINITION 1.31. On dira qu'un anneau  $A_i(x_0)$  est le *fil*s d'un anneau  $A_p(x_0)$ ,  $p < i$ , si  $f^{i-p}$  induit un revêtement double non ramifié de  $A_i(x_0)$  sur  $A_p(x_0)$ . L'anneau  $A_p(x_0)$  sera donc le *père* de  $A_i(x_0)$ . On note que, si le père existe, il est unique.

Un anneau (critique)  $A_i(x_0)$  sera dit *bon* si, dans la double ligne  $i, i + 1$  qui le porte, il n'y a aucun anneau semi-critique. On verra que cette qualité est héréditaire et qu'un bon anneau a toujours deux bons fils.

La démonstration du lemme 1.30 repose sur les quatre affirmations ci-dessous.

AFFIRMATION 1.32. *Tout anneau (critique) a au moins un fils.*

*Preuve.* Étant donné un anneau critique  $A_p(x_0)$ , on considère la première pièce critique qu'on rencontre dans  $T(x_0)$  sur la ligne  $p + 1$  après la colonne 0 (elle existe bien car  $T(x_0)$  est récurrent). Si on note  $(p + 1, i - p)$  les coordonnées de ce terme, le lemme 1.24 montre que l'anneau  $A_p(x_0)$  est une copie conforme de  $A_{i-1}(f(x_0))$ , de sorte que  $A_i(x_0)$  est un fils de  $A_p(x_0)$ .  $\square$

AFFIRMATION 1.33. *Si un anneau est fils unique, il est bon.*

*Preuve.* On suppose que  $A_i(x_0)$  est le fils de  $A_p(x_0)$  mais n'est pas bon. Le tableau  $T(x_0)$  contient alors un anneau semi-critique de profondeur  $i$ ,  $A_i(f^j(x_0))$ . Celui-ci se trouve nécessairement dans une colonne d'indice  $j \geq i - p$  car la double diagonale liant le fils au père est formée de pièces non critiques entre la colonne 0 et la colonne  $i - p$  qui porte  $A_p(f^{i-p}(x_0)) = A_p(x_0)$ , ces deux colonnes n'étant pas considérées. La règle T3) du lemme 1.18 fournit alors un anneau semi-critique de profondeur  $p$  dans la colonne  $j + p$  et, entre ces deux positions semi-critiques, les anneaux portés par la double diagonale de  $A_i(f^j(x_0))$  sont non-critiques.

Soit  $(p+1, k)$  les coordonnées de la première pièce critique rencontrée sur la ligne  $p+1$  après la colonne  $j+p$ . L'anneau  $A_p(f^k(x_0))$  est critique et la double diagonale qu'il détermine dans  $T(x_0)$  est formée de pièces non critiques au moins jusqu'à la colonne  $j$ . Sur cette double diagonale, le premier anneau critique ou semi-critique rencontré se trouve à une profondeur  $l$ . Si cet anneau est critique, c'est un fils de  $A_p(x_0)$  différent de  $A_i(x_0)$  car  $l > i$ . Si c'est un anneau semi-critique, la propriété T3) montre que l'anneau  $A_{l-1}(f(x_0))$  (dans la colonne 1) est conforme à un anneau semi-critique de profondeur  $p$ , à savoir  $A_p(f^{l-p}(x_0))$ . On note alors  $A_p(f^m(x_0))$  le premier anneau critique de profondeur  $p$  qu'on trouve à droite de  $A_p(f^{l-p}(x_0))$ . D'après le lemme 1.24, cet anneau est l'image conforme de  $A_{p+m-1}(f(x_0))$  et  $A_{p+m}(x_0)$  est donc un fils de  $A_p(x_0)$ , à nouveau différent de  $A_i(x_0)$  car  $p+m > i$ .  $\square$

**AFFIRMATION 1.34.** *Si un anneau est bon, il a au moins deux fils.*

*Preuve.* Soit  $A_p(x_0)$  un anneau et  $A_i(x_0)$  un de ses fils (affirmation 1.32). La double diagonale qui joint  $A_i(x_0)$  à son père  $A_p(f^{i-p}(x_0)) = A_p(x_0)$  n'est pas critique entre les colonnes 1 et  $i-p-1$ . Par ailleurs, comme la colonne  $i-p$  n'est pas totalement critique (car  $T(x_0)$  n'est pas périodique), elle porte un anneau semi-critique de profondeur finie  $k > p$ . D'après la propriété T3), hors de la colonne 0, les seules positions critiques de profondeur  $\geq p$  sur la double diagonale qui porte cet anneau ont pour coordonnées

$$(k - q(i - p), (q + 1)(i - p)), \quad 0 \leq q \leq \frac{k - p}{i - p}.$$

En particulier, comme  $A_p(x_0)$  est bon,  $k - p$  ne peut être un multiple entier de  $i - p$ , sans quoi l'anneau  $A_p(f^{k+i-2p}(x_0))$  serait semi-critique. Cet anneau  $A_p(f^{k+i-2p}(x_0))$  est donc non-critique et le lemme 1.24 assure que le premier anneau critique de profondeur  $p$  situé plus à droite, sur une colonne d'indice  $j > k + i - 2p$ , est l'image conforme de  $A_{j+p-1}(f(x_0))$ . L'anneau  $A_{j+p}(x_0)$  est donc un second fils de  $A_p(x_0)$ .  $\square$

**AFFIRMATION 1.35.** *Si un père est bon, ses fils le sont aussi.*

*Preuve.* En effet, si un anneau  $A_p(x_0)$  a un fils  $A_i(x_0)$  qui n'est pas bon, il existe un anneau semi-critique de profondeur  $i$ . La propriété T3) permet alors directement de trouver un anneau semi-critique de profondeur  $p$ , de sorte que  $A_p(x_0)$  n'est pas bon.  $\square$

*Preuve du lemme 1.30.* On va montrer que, pour tout anneau critique non dégénéré  $A_p(x_0)$ , la somme des modules des descendants de  $A_p(x_0)$  est

infinie. Pour cela, on note  $\mathcal{G}_n$ ,  $n > 0$ , l'ensemble des descendants de  $A_p(x_0)$  à la  $n$ -ième génération ( $\mathcal{G}_1$  est formé des fils,  $\mathcal{G}_2$  des petits-fils...). Comme tout anneau a un fils et au plus un père, les ensembles  $\mathcal{G}_n$  sont non vides et disjoints. Par ailleurs, les affirmations démontrées plus haut assurent que chaque ensemble  $\mathcal{G}_n$  a au moins  $2^{n-1}$  éléments. En effet, les éléments de  $\mathcal{G}_n$  sont les descendants des éléments de  $\mathcal{G}_1$  à la  $(n-1)$ -ième génération. Si  $\mathcal{G}_1$  a au moins deux éléments, la récurrence donne l'estimation. Si  $\mathcal{G}_1$  n'a qu'un élément, ce fils unique est bon (affirmation 1.33) et a donc deux fils (affirmation 1.34), lesquels sont bons (affirmation 1.35) et ainsi de suite.

D'autre part, si  $A \in \mathcal{G}_n$ , le module de  $A$  vaut  $\frac{1}{2^n} \bmod A_p(x_0)$ . La somme des modules des descendants de  $A_p(x_0)$  est donc infinie.  $\square$

LEMME 1.36. *Si le tableau  $T(x_0)$  du point critique est périodique, de période  $k$ , l'application  $f^k: P_{l+k}(x_0) \rightarrow P_l(x_0)$  est à allure quadratique pour un certain entier  $l$ . L'impression  $\text{Imp}(x_0)$  du point critique est alors l'ensemble de Julia rempli de  $f^k|_{P_{l+k}(x_0)}$  et est connexe.*

*Preuve.* Entre la colonne 0 et la colonne  $k$ , la profondeur des positions critiques est bornée par un entier  $i$ . Si  $A_l(x_0)$  est un anneau non dégénéré de profondeur  $l > i + k$ , la pièce  $P_l(x_0)$  contient  $\bar{P}_{l+1}(x_0)$ , donc aussi  $\bar{P}_{l+k}(x_0)$ , et l'application  $f^k|_{P_{l+k}(x_0)}: P_{l+k}(x_0) \rightarrow P_l(x_0)$  est de degré 2, donc à allure quadratique.

D'autre part, pour tout  $j \geq 0$ , les pièces du bout de  $f^{kj}(x_0)$  sont celles de la colonne  $kj$  de  $T(x_0)$ , c'est-à-dire les pièces critiques. Par suite,  $f^{kj}(x_0) \in P_l(x_0)$  pour tout  $j$ , ce qui montre que l'ensemble de Julia rempli associé à  $f^k$  est connexe. Enfin, cet ensemble de Julia rempli est l'intersection des préimages  $f^{-kj}(P_l(x_0))$  qui sont contenues dans  $P_l(x_0)$ . C'est donc l'intersection sur  $i$  des  $P_{l+ki}(x_0)$ , c'est-à-dire l'impression  $\text{Imp}(x_0)$  du point critique.  $\square$

Pour compléter la démonstration du théorème 1.10, il reste à établir le résultat ci-dessous.

LEMME 1.37. *On suppose toujours que  $T(x_0)$  est périodique de période  $k$ . Si un point  $x$  tombe par itération dans l'impression  $\text{Imp}(x_0)$  du point critique, son impression  $\text{Imp}(x)$  est une préimage conforme de  $\text{Imp}(x_0)$ . Sinon, et si  $x$  est infiniment bague par  $\Gamma$ , l'impression  $\text{Imp}(x)$  est réduite au point  $x$ .*

*Preuve.* Si  $f^n(x)$  est dans  $\text{Imp}(x_0) = \bigcap_{i \geq 0} P_i(x_0)$ , la colonne  $n$  de  $T(x)$  est entièrement critique. De plus, si  $n$  est le plus petit entier tel que  $f^n(x)$  soit

dans  $\text{Imp}(x_0)$ , les pièces critiques situées sur les colonnes  $0, \dots, n-1$  de  $T(x)$  ont une profondeur bornée par un entier  $l$ . Par suite, pour tout  $i \geq l$ , l'application  $f^n$  induit un homéomorphisme conforme de  $P_{i+n}(x)$  sur  $P_i(x_0)$ , donc un homéomorphisme de  $\text{Imp}(x)$  sur  $\text{Imp}(x_0)$ .

On suppose à présent que l'orbite de  $x$  évite  $\text{Imp}(x_0)$ , c'est-à-dire qu'aucune colonne de  $T(x)$  n'est entièrement critique. On va montrer que, si  $T(x)$  est récurrent, il est non persistant. Il suffit pour cela de construire une suite  $n_i$  sur laquelle  $\tau$  est bornée.

Dans le tableau  $T(x_0)$ , entre les colonnes 0 et  $k$ , les positions critiques ont une profondeur majorée par  $l$ . Dans  $T(x)$ , on regarde la colonne de plus petit indice  $j$  où l'on trouve des positions critiques à une profondeur strictement supérieure à  $l$  et on note  $p$  la profondeur de la dernière position critique sur cette colonne. L'anneau  $A_p(f^j(x))$  est donc semi-critique. La propriété T3) assure alors que la diagonale issue de la position  $(p+j+1, 0)$  dans  $T(x)$  ne contient aucune pièce critique à une profondeur strictement supérieure à  $l+1$ . Ainsi,  $\tau(p+j+1) \leq l+1$  et on pose  $n_1 = p+j+1$ . On continue en considérant la colonne de plus petit indice qui contient des positions critiques de profondeur strictement supérieure à  $p$ . On construit ainsi une suite  $n_i$  sur laquelle  $\tau$  reste bornée par  $l+1$ .  $\square$

## §2 LA PRATIQUE

### 2.1 UN THÉORÈME DE CONNEXITÉ LOCALE

On s'intéresse dans la suite aux polynômes de degré  $d+1$ ,  $d \geq 2$ , dont l'un des points fixes dans  $\mathbf{C}$  est un point critique de multiplicité  $d-1$ . Un tel polynôme est conjugué, par une transformation affine de  $\mathbf{C}$ , à un polynôme de la forme

$$(*) \quad f(x) = a + \left(x + \frac{d+2}{d}a\right)(x-a)^d, \quad x \in \mathbf{C},$$

où  $a$  désigne le point fixe critique de multiplicité  $d-1$ . Le point  $-a$  est alors l'unique autre point critique et sera appelé (par contraste) *point critique libre*.

Le point  $a$  est un point fixe super-attractif. Son *bassin d'attraction* est l'ouvert

$$\tilde{B}(a) = \left\{ x \in \hat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \right\}$$