

## 4. An example for the non-cyclic case

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$N(r, b_1, \dots, b_d) = f(r)\mu$$

where  $\mu \in \mathbf{Q}_v$  is very close to 1; in fact  $f(r)$  is near to  $f(a_v)$ , which is nonzero. By the previous remarks,  $\mu^{-1}$  is in the image of  $N(r, x_1, \dots, x_d)$  on  $\mathbf{Q}_v^d$ , hence the same must be true for  $f(r)$ , by the basic multiplicative identity for  $N$ . In particular  $f(r)$  will be a norm from  $\mathbf{Q}_v(P_r)$  to  $\mathbf{Q}_v$ .

Let now  $S$  consist of the elements of  $\mathbf{Q}$  which are not poles or zeros of  $f$ , which satisfy  $[\mathbf{Q}(P_s) : \mathbf{Q}] = d$  and which are sufficiently close (in the mentioned sense) to  $a_v$ , for each  $v \in \Sigma$ . We have proved that  $f(s)$  is a norm from  $\mathbf{Q}_v(P_s)$ , for all  $s \in S$  and for all places  $v$ . By Hasse's theorem,  $f(s)$  is a norm from  $\mathbf{Q}(P_s)$ , so  $S \subset N_f$ . On the other hand  $S \cap \mathbf{Z}$  contains the complement of a thin set in an arithmetic progression, whence  $N_f$  cannot satisfy the conclusion of the Theorem (or of Corollary 1), as required.  $\square$

#### 4. AN EXAMPLE FOR THE NON-CYCLIC CASE

We show that assuming that  $L/K$  is cyclic is essential in the Theorem (as in the number-field case, as shown in [CF, Ex. 5]).

To describe a counterexample, define  $L = \mathbf{Q}(t, \sqrt{4t+3}, \sqrt{4t+7})$ ,  $f(t) = t^2$ . We proceed to show that  $\mathbf{N} \subset N_f$ . We have to show that for all large integers  $n$ ,  $n^2$  is a norm from  $L(n) := \mathbf{Q}(\sqrt{4n+3}, \sqrt{4n+7})$ . By [CF, Ex. 5.1 and 5.2, p.360] it is sufficient to show that the local degree  $[L(n)_w : \mathbf{Q}_p]$  is 4 for some prime  $p$ . Observe that the Jacobi symbol  $\left(\frac{4n+3}{4n+7}\right) = \left(\frac{-1}{4n+7}\right) = -1$ . Hence there exists some prime  $p$  dividing  $4n+7$  with an odd multiplicity and such that  $\left(\frac{4n+3}{p}\right) = -1$ . Then  $p$  ramifies in  $L(n)$  and the residual degree is 2, proving the claim. Observe that the first conclusion of Corollary 1 does not hold for  $N_f$ .

On the other hand,  $t^2$  is not a norm from  $L$  to  $K$ . Otherwise by [CF, Ex. 5.1] we could write  $t$  as the product of three norms from the three quadratic subfields of  $L$ . In other words we could write nontrivially

$$q^2(t)t = (a_1^2(t) - (4t+3)b_1^2(t))(a_2^2(t) - (4t+7)b_2^2(t))(a_3^2(t) - (4t+3)(4t+7)b_3^2(t)),$$

where  $q, a_i, b_j \in \mathbf{Q}[t]$ . We may suppose that  $a_i$  and  $b_i$  are coprime for each  $i$ , otherwise we can divide out a common factor. Now, putting  $t = 0$  we get a contradiction.