

3.1 Existence of eigenfunctions

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

This implies that

$$\frac{1}{\#S} |A|_{f^2} = \sum_{\gamma \in A} f^2(\gamma),$$

$$\frac{1}{\lambda(\#S)^2} |\partial A|_{f^2} \leq \sum_{\gamma \in \partial A} f^2(\gamma) \leq \lambda |\partial A|_{f^2}.$$

By Theorem 2, the first condition implies the second one. \square

REMARK. The proof of Theorem 3 can easily be generalized to the case where P is a convolution operator with a finitely supported probability measure.

3. REMARKS

We will now make some comments about Theorems 2 and 3. We will state some theorems about the existence of eigenfunctions for the Markov operator and discuss whether one can take in the generalized Følner condition the eigenfunctions to be in $L^2(X, \mu)$.

For simplicity we will suppose that X is a connected, locally finite graph (i.e. the degree of each vertex is finite) and we consider the *simple random walk* going with equal probability from one vertex to any of its neighbors. We associate with this random walk the simple random walk operator P defined by

$$Pf(v) = \frac{1}{N(v)} \sum_{w \sim v} f(w) \quad \text{for } f \in l^2(X, N)$$

where $N(v)$ is the degree of vertex v in X (i.e. the number of edges adjacent to v), where $w \sim v$ means that w and v are connected by an edge and where $l^2(X, N)$ is the space of real-valued functions f on the vertices of X such that $\sum_{x \in X} f^2(x)N(x)$ is finite.

3.1 EXISTENCE OF EIGENFUNCTIONS

THEOREM 4 ([20]). *Let X be an infinite, locally finite graph and let P be the simple random walk operator on $l^2(X, N)$. For any $\lambda \geq \|P\|$ there exists a positive eigenfunction f of P with eigenvalue λ , i.e.*

$$Pf(x) = \lambda f(x) \quad \text{and } f(x) > 0 \text{ for } x \in X.$$

For $\lambda < \|P\|$ there are no positive eigenfunctions of P with eigenvalue λ .

Proof. There are several proofs of this theorem. In [20] one can find the proof where the analogue of Perron-Frobenius theory is developed and in [11] the truncation method is used. \square

3.2 EIGENFUNCTIONS IN l^2

One can ask whether the positive eigenfunctions of the random walk operator are in $l^2(X, N)$. The answer is no in the case when X is the Cayley graph of an infinite group Γ (see Theorem 5). But in the general case there are examples of eigenfunctions which are in $l^2(X, N)$ (see Proposition 2).

3.2.1 THE CASE OF GROUPS

THEOREM 5. *Let f be a positive eigenfunction of the simple random walk operator P on the group Γ generated by a finite symmetric set S , i.e. $Pf = \lambda f$. If Γ is infinite then*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f^2(\gamma) = +\infty.$$

Proof. Suppose the contrary, i.e. that there is a positive eigenfunction f of the operator P for which the l^2 norm is finite:

$$\begin{aligned} Pf_0 &= \lambda f_0, \\ \sum_{\gamma \in \Gamma} f_0^2(\gamma) &< +\infty. \end{aligned}$$

The second condition implies that f_0 is not constant and so there are $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ such that

$$f_0(\gamma_0) < f_0(\gamma_1).$$

Let us define the function f_1 as a translation of f_0 by $\gamma_0\gamma_1^{-1}$, i.e.

$$f_1(\gamma) = f_0(\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma).$$

The function f_1 , being the translation of f_0 , is an eigenfunction of P , i.e.

$$Pf_1 = \lambda f_1.$$

So the function \tilde{f} defined as follows:

$$\tilde{f}(\gamma) = \max\{f_0(\gamma), f_1(\gamma)\},$$

satisfies

$$P\tilde{f} \geq \lambda\tilde{f}.$$