L'Enseignement Mathématique, t. 45 (1999), p. 317–320

RETOUR SUR UN THÉORÈME DE CHEVALLEY

par D. LUNA

ABSTRACT. A new proof is given of a classical result due to Chevalley, concerning the unipotent radical of algebraic groups.

Soit G un groupe algébrique affine connexe (le corps de base k étant algébriquement clos), et soit T un tore maximal de G.

Lorsqu'on développe la théorie des groupes algébriques (voir par exemple les ouvrages [Bo] ou [Sp]), après quelques généralités (sur la décomposition de Jordan, les espaces homogènes, les groupes résolubles *), ...), on commence par établir certaines propriétés des sous-groupes de Borel: on montre que les sous-groupes de Borel sont conjugués, et que tout sous-groupe de Borel est égal à son normalisateur; de plus, si $\mathbf{B}^T$ désigne l'ensemble des sous-groupes de Borel de G contenant T, on montre que $\mathbf{B}^T$ est fini et que le normalisateur $N_G(T)$ de T opère transitivement dans $\mathbf{B}^T$, etc. Puis on introduit (le radical et) le radical unipotent de G, noté $R_u(G)$ dans la suite, et on met le cap sur la structure des groupes semi-simples et réductifs.

C'est ici qu'apparaît le résultat charnière suivant, crucial pour la suite:

THÉORÈME (Chevalley). *La composante neutre de l'intersection des $R_u(B)$ ($B \in \mathbf{B}^T$), est égale au radical unipotent de G.*

Les preuves de ce théorème qu'on trouve dans la littérature (voir [Bo] § 13, page 174, ou [Sp] chap. 7, page 130), sont proches de la preuve originale de Chevalley ([Ch], exp. 12). Celle-ci utilise déjà quelques propriétés des «racines» de G et se trouve ainsi imbriquée dans l'étape suivante de la théorie: en effet, le théorème de Chevalley est utilisé à son tour lorsqu'on

*) Pour une présentation simple des théorèmes de structure des groupes algébriques affines résolubles connexes, voir aussi [Do].