

Objektyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\int_{B_0} f(\cdot, y) d\bar{\nu}_0(y) = \int_{B_0} \tilde{f}(\cdot, y) d\bar{\nu}_0(y) \quad [\bar{\mu}_0].$$

Trivially, this remains true if $[\bar{\mu}_0]$ is replaced by $[\mu]$, and an integration yields

$$(18) \quad \int_A \int_{B_0} f(x, y) d\bar{\nu}_0(y) d\mu(x) = \int_A \int_{B_0} \tilde{f}(x, y) d\bar{\nu}_0(y) d\mu(x)$$

($A \in \mathcal{A}$, $B_0 \in \bar{\mathcal{B}}_0$). We now want to interchange the order of integrations. Since $\tilde{f}$ is trivially $\mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{B}}_0$ -measurable, we may obviously do this on the right hand side of (18). To do the same on the left hand side, we rewrite it successively as

$$\int_A \int_{B_0} f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{B_0} \int_A f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_{B_0} \int_A f(x, y) d\mu(x) d\bar{\nu}_0(y),$$

where the last equality follows from a second application of Claim 1, with the role of the variables interchanged. Thus (18) yields

$$(19) \quad \int_{B_0} \int_A f(x, y) d\mu(x) d\bar{\nu}_0(y) = \int_{B_0} \int_A \tilde{f}(x, y) d\mu(x) d\bar{\nu}_0(y)$$

($A \in \mathcal{A}$, $B_0 \in \bar{\mathcal{B}}_0$). Now the argument leading from (17) to (18) can be repeated to lead from (19) to a corresponding statement with B in place of B_0 , ν in place of $\bar{\nu}_0$, and $\mathcal{B}$ in place of $\bar{\mathcal{B}}_0$, which is equivalent to

$$\int_{A \times B} f d\mu \otimes \nu = \int_{A \times B} \tilde{f} d\mu \otimes \nu \quad (A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}).$$

This shows that $f = \tilde{f}$ $[\mu \otimes \nu]$, which yields the desired conclusion. $\square$

ACKNOWLEDGEMENT. The present work was supported by a Heisenberg grant of the Deutsche Forschungsgemeinschaft. I thank H. von Weizsäcker for helpful remarks on an earlier version.

REFERENCES

- COHN, D.L. (1980) *Measure Theory*. Birkhäuser.
 EDWARDS, R.E. (1965) *Functional Analysis. Theory and Applications*. Holt, Rinehart and Winston.
 ELSTRODT, J. (1996) *Maß- und Integrationstheorie*. Springer.
 FRIEDMAN, H. (1980) A consistent Fubini-Tonelli theorem for nonmeasurable functions. *Illinois J. Math.* 24, 390–395.

- MATTNER, L. (1999) Minimal sufficient statistics in location-scale parameter models.
[Submitted for publication.]
- OXToby, J. C. (1980) *Measure and Category*. 2nd ed. Springer, New York.
- ROYDEN, H. L. (1988) *Real Analysis*. 3rd ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- RUDIN, W. (1987) *Real and Complex Analysis*. 3rd ed. McGraw-Hill.
- RUDIN, W. (1991) *Functional Analysis*. 2nd ed. McGraw-Hill.
- SIERPIŃSKI, W. (1920) Sur les rapport entre l'existence des intégrales $\int_0^1 f(x, y) dx$, $\int_0^1 f(x, y) dy$ et $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$. *Fund. Math.* 1, 142–147. Reprinted in: Sierpiński (1975), pages 341–345.
- SIERPIŃSKI, W. (1975) *Œuvres Choiesies, Tome II*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

(Reçu le 2 mars 1999)

Lutz Mattner

Universität Hamburg
Institut für Mathematische Stochastik
Bundesstr. 55
D–20146 Hamburg
Germany
e-mail: mattner@math.uni-hamburg.de

Vide-leer-empty