1. Nombres de Beurling

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 45 (1999), p. 253–270

LA VERSION DE DIAMOND DE LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE DE DIRICHLET

par Michel BALAZARD

1. NOMBRES DE BEURLING

La démonstration, en 1896, du théorème des nombres premiers par Hadamard et de la Vallée Poussin, conclut un siècle de recherches, menées notamment par Gauss, Legendre, Dirichlet, Tchebycheff et Riemann. Une énigme résolue, une autre apparut : quelle était la vraie nature de ce résultat au carrefour de l'analyse et de l'arithmétique, du continu et du discret ? Ces questions presque philosophiques ont été examinées par trois des plus grands mathématiciens du vingtième siècle. En 1949, Erdős et Selberg donnèrent une démonstration élémentaire du théorème, élucidant ainsi une partie de sa nature combinatoire. En 1937, Beurling créa la théorie des nombres premiers généralisés.

Son idée fut d'envisager une étude "dynamique" du théorème des nombres premiers. Considérons une suite croissante

$$\boldsymbol{\beta} :\ 1 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots, \qquad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$$

et formons tous les produits :

$$\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{\nu}} := \beta_1^{\nu_1}\beta_2^{\nu_2}\dots$$

où $\boldsymbol{\nu} := (\nu_1, \nu_2, \dots)$ désigne une suite arbitraire de nombres entiers naturels, nuls à partir d'un certain rang. Rangeons ces produits dans l'ordre croissant :

$$1 = \alpha_1 < \alpha_2 \leq \dots, \qquad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty\,.$$

Les β_n sont les nombres premiers généralisés et les α_n les nombres entiers généralisés de Beurling. Le problème général est d'étudier les relations existant entre les α_n et les β_n, ou plus précisément entre les fonctions de comptage:

$$P(x) := \sum_{\beta_n \leq x} 1$$

et

$$N(x) := \sum_{\alpha_n \leq x} 1 = \sum_{\beta^\nu \leq x} 1 .$$

Cette étude se divise en deux parties: le problème direct est la détermination des propriétés de $N(x)$ connaissant celles de $P(x)$, et dans l'autre direction on parle de problème inverse.

Le projet initial de Beurling est l'analyse de la stabilité du théorème des nombres premiers. Posons donc

$$P(x) = \mathrm{li}(x) + x\eta(x) ,$$
$$N(x) = Dx + x\varepsilon(x) ,$$

où li est la fonction logarithme intégral et D une constante positive [1]). On a les résultats suivants:

THÉORÈME 1 (Beurling 1937, [5]). *Si* $\gamma > 3/2$ *et* $\varepsilon(x) = O\big((\log x)^{-\gamma}\big)$, *on a* $\eta(x) = o(1/\log x)$ *(c'est-à-dire* $P(x) \sim x/\log x$*).*

Ce théorème est optimal: l'énoncé devient faux si $\gamma = \frac{3}{2}$. D'autre part, une conjecture de Bateman et Diamond (1969, cf. [4]) récemment confirmée par Kahane donne la généralisation suivante du théorème 1:

THÉORÈME 2 (Kahane 1997, [11], [12]). *Si*

$$\int_1^{+\infty} (\varepsilon(x) \log x)^2 \frac{dx}{x} < +\infty ,$$

alors $P(x) \sim x/\log x$.

Des hypothèses plus restrictives sur $\varepsilon(x)$ permettent naturellement de donner des informations plus précises sur $\eta(x)$. On dispose ainsi des résultats suivants:

---

[1]) On notera, par exemple dans le cas des nombres entiers usuels, que l'omission d'un nombre fini de nombres premiers ne modifie pas le comportement asymptotique de $P(x)$ mais change la valeur de la limite de $N(x)/x$ quand x tend vers l'infini. L'apparition d'une constante positive D dans l'expression de $N(x)$ est donc inévitable.

THÉORÈME 3 (Wegmann 1966, [17]). *Si* $a > 3$, $a > 3b$ *et* $\varepsilon(x) = O(\log^{-a} x)$, *alors* $\eta(x) = O(\log^{-b} x)$.

THÉORÈME 4 (Hall 1972, [10]). *Soient* a, c *et* b *tels que*

$$0 < a \leq 1, \quad c > 0, \quad b \leq a/7.91\,.$$

Si $\varepsilon(x) = O(\exp(-c \log^a x))$ *alors* $\eta(x) = O(\exp(-\log^b x))$.

Les théorèmes 1 à 4 concernent le problème inverse de Beurling: il s'agit d'obtenir des conclusions sur les nombres premiers à partir d'hypothèses faites sur les nombres entiers. Le problème direct est l'objet des résultats suivants [2]).

THÉORÈME 5 (Diamond 1977, [8]). *Si*

$$\int_1^{+\infty} |\eta(x)| \frac{dx}{x} < +\infty\,,$$

alors $N(x)/x$ *tend vers une limite positive quand* x *tend vers l'infini.*

THÉORÈME 6 (Diamond 1970, [7]). *Soit* $a > 1$. *Si* $\eta(x) = O(\log^{-a} x)$, *alors* $\varepsilon(x) = O(\log^{3-a} x)$.

THÉORÈME 7 (Diamond 1970, [7]). *Soit* a *tel que* $0 < a < 1$ *et* $b = \dfrac{a}{1+a}$. *Si* $\eta(x) = O(\exp(-\log^a x))$, *alors* $\varepsilon(x) = O\big(\exp(-(\log x \log\log x)^b)\big)$.

Il est intéressant de constater que les démonstrations des théorèmes 1, 2 et 4 utilisent l'analyse harmonique, alors que celles des théorèmes 3, 5, 6 et 7 sont essentiellement élémentaires. Le présent exposé a pour objet de rappeler, sans démonstrations, le cadre conceptuel proposé par Diamond pour traiter le problème direct de Beurling (paragraphe 2), d'isoler le principe technique fondamental intervenant dans les démonstrations (paragraphe 3) et enfin de présenter une application nouvelle (paragraphe 4).

---

[2]) Les travaux [18] et [1] donnent également des informations intéressantes sur ce problème.