

3. CONCLUDING REMARKS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

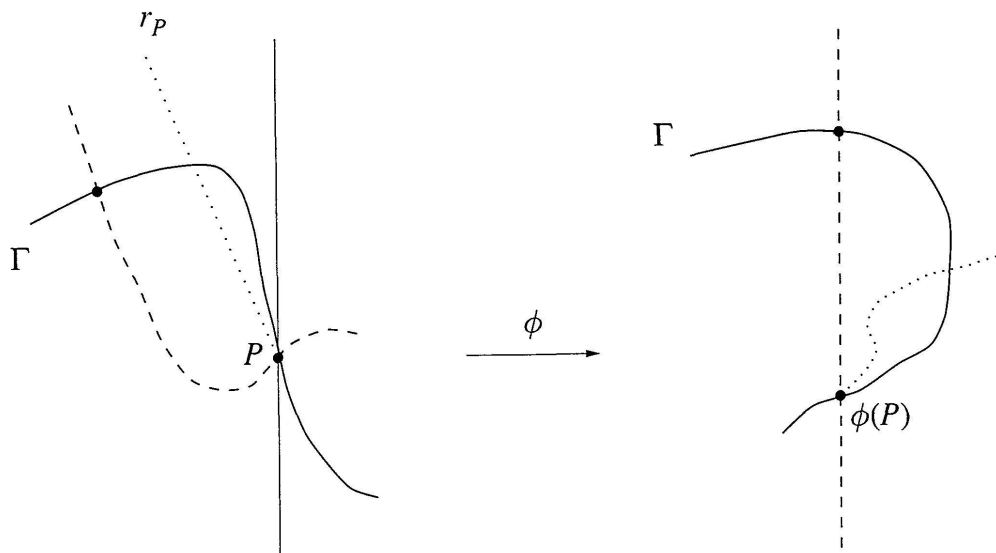


FIGURE 5

Why Γ must be a Lipschitz graph

III. THE SECOND CASE

Finally, the same remark can be applied in the second of the two cases from Lemma 1 where Γ contains a whole vertical interval. For we may take P to be the midpoint of that interval and apply ϕ once – the vertical through $\phi(P)$ will intersect Γ in two isolated points D_0 and E_0 , and we are back in the first situation we already dealt with.

The proof of the theorem is complete.

3. CONCLUDING REMARKS

For the sake of clarity, we did not prove the most general result that can be obtained by our method. Here we just indicate possible generalizations.

First of all, our proof does not require the monotone twist condition but only a sort of “cone condition on Γ ”. Namely, what we really need is the requirement that all (pre-)images of verticals lie outside certain cones centred at points on Γ ; we do not use the much more restrictive fact that they are graphs. (This subtle point might be the reason why we have not succeeded in proving a well-known generalization of Birkhoff’s Theorem to boundaries of invariant annuli [Fa, He, KH] by our method.)

Secondly, Birkhoff's Theorem also holds true for invariant curves of products $\phi_N \circ \dots \circ \phi_1$ of monotone twist mappings of the same sign. In general, such products are not monotone twist mappings anymore. This generalization follows immediately by our method if, even more generally, each ϕ_n satisfies the same "cone condition" on $(\phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_1)(\Gamma)$. For every single ϕ_n presses more area into a fold, and $\sup_{n \geq 0} |\Omega_n| < \infty$ because Γ is mapped onto itself again after N steps, instead of one. A proof along the traditional lines was given by Mather only a couple of years ago [Ma3, Appendix].

Finally, we did not really need that ϕ is a diffeomorphism. Everything can also be formulated and proved for homeomorphisms that preserve Lebesgue measure and satisfy the "cone condition".

REFERENCES

- [Bi1] BIRKHOFF, G. D. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.* 43 (1922), 1–119. [Reprinted in: *Collected Mathematical Papers*, Dover/AMS 1968].
- [Bi2] — Sur quelques courbes fermées remarquables. *Bull. Soc. Math. France* 60 (1932), 1–26. [Reprinted in: *Collected Mathematical Papers*, Dover/AMS 1968].
- [Fa] FATHI, A. Appendix to Chapter I of [He].
- [He] HERMAN, M. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau I. *Astérisque* 103–104 (1983).
- [KH] KATOK, A. and B. HASSELBLATT. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [LCa] LE CALVEZ, P. Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore. *Astérisque* 204 (1991).
- [MP] MACKAY, R. S. and I. C. PERCIVAL. Converse KAM: theory and practice. *Comm. Math. Phys.* 98 (1985), 469–512.
- [Ma1] MATHER, J. N. Glancing billiards. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 2 (1982), 397–403.
- [Ma2] — Non-existence of invariant circles. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 4 (1984), 301–309.
- [Ma3] — Variational construction of orbits for twist diffeomorphisms. *J. Amer. Math. Soc.* 4 (1991), 207–263.
- [MF] MATHER, J. N. and G. FORNI. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems. In: S. Graffi (ed.): *Transition to Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer LNM 1589, 1992.