4. La structure symplectique de l'espace des mouvements képlériens

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

— en introduisant la structure symplectique de l'espace des mouvements képlériens — facilite aussi le calcul des autres *inégalités* [19]). C'est ce qui la rendra célèbre puisque Lagrange montrera que la variation de l'angle du périhélie de Jupiter, observée par les astronomes (mais non encore expliquée à l'époque), est périodique. Il en calculera la période (~ 900 ans si on croit Sternberg [Ste69]).

4. La structure symplectique de l'espace des mouvements képlériens

Ces crochets $[a,b]$, $[a,c]$, ..., fonctions seulement des éléments képlériens a, b, c etc. possèdent trois propriétés remarquables.

1° Ils sont *anti-symétriques*:

(36) $$[a,b] = -[b,a], \quad [a,c] = -[c,a], \quad \text{etc.},$$

2° La matrice ω définie par la famille de crochets:

(37) $$\omega_{ab} = [a,b], \quad \omega_{ac} = [a,c], \quad \text{etc.},$$

est inversible, et son inverse est la matrice des parenthèses de Lagrange:

(38) $$\left(\omega^{-1}\right)_{ab} = (a,b), \quad \left(\omega^{-1}\right)_{ac} = (a,c), \quad \text{etc.},$$

3° Pour tous les triplets d'éléments (a,b,c), (a,b,h), ..., (i,h,k) l'équation aux dérivées partielles suivante est vérifiée:

(39) $$\frac{\partial[b,c]}{\partial a} + \frac{\partial[c,a]}{\partial b} + \frac{\partial[a,b]}{\partial c} = 0, \quad \text{etc.}$$

Ces trois propriétés font de la matrice ω ce qu'on appelle aujourd'hui une *forme symplectique*.

Sans vouloir s'attarder sur les définitions formelles, disons seulement qu'une *forme différentielle* définie sur un ouvert d'un espace numérique est une application qui à chaque point de cet ouvert associe une application multilinéaire alternée. Par exemple, une 2-forme ω définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^{2n}$ sera caractérisée par $n(n-1)/2$ fonctions ω_{ij}, de telle sorte que:

(40) $$\omega(x)(X,Y) = \sum_{i,j} \omega_{ij}(x)\, X^i Y^j,$$

[19]) C'est ainsi qu'on appelait les variations des éléments de l'orbite dues aux perturbations extérieures.

où x est un point de l'ouvert de définition, $X = (X^i)$ et $Y = (Y^j)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^{2n}$, les indices i et j variant de 1 à $2n$. On dit que la 2-forme différentielle ω est *symplectique* si elle est *non dégénérée* en chaque point et si elle est *fermée*, c'est-à-dire[20]) :

$$\partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki} + \partial_k \omega_{ij} = 0\,, \tag{41}$$

pour tout triplet d'indices i, j, k ; on note $d\omega = 0$.

Les trois propriétés que nous avons énoncées plus haut font des crochets de Lagrange les composantes d'une forme symplectique sur l'espace des mouvements képlériens de la planète. Les deux premières propriétés ont été soulignées explicitement par Lagrange, même s'il ne pouvait considérer à son époque ces crochets comme les éléments d'une matrice, *a fortiori* d'une 2-forme différentielle. Quant à la propriété de fermeture il ne l'évoque pas. Ce n'est que plus tard que son importance apparaîtra avec la formalisation du calcul différentiel. Du point de vue de la mécanique cette dernière propriété est la conséquence de l'existence du potentiel Ω des forces de perturbation : $X = \partial\Omega/\partial\mathbf{r}$.

Lagrange calculera explicitement la valeur de ses crochets, c'est-à-dire les composantes de la forme symplectique, qui sont au nombre de quinze. Il en donnera les expressions dans diverses cartes de l'espace des mouvements képlériens, c'est-à-dire pour divers choix d'éléments képlériens caractérisant les mouvements de la planète. Il n'y a pas grand intérêt à donner ici l'ensemble de ces expressions que l'on peut trouver dans [Lag08] et [Lag11].

REMARQUE. Lagrange note que l'on peut toujours choisir les positions et les vitesses à un instant donné, comme constantes d'intégration, plutôt que les éléments de la planète. L'expression des parenthèses et des crochets s'en trouve alors notablement simplifiée. En effet dans ce cas les seuls crochets non nuls sont :

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i] = 1, \quad i = 1, 2, 3. \tag{42}$$

Comme on le voit les variables se regroupent par deux : $\mathbf{r}_i$ avec $\mathbf{v}_i$ et leurs crochets sont constants. Cette forme symplectique définie de façon générale sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ est appelée aujourd'hui *forme symplectique canonique*. Le *Théorème de Darboux* dit que toute forme symplectique possède au moins localement des coordonnées canoniques. Mais Lagrange, même s'il dit qu'« il y aurait

---

20) Cette formulation n'est pas très parlante, dire qu'une forme différentielle ω est fermée signifie précisément qu'elle est *localement exacte* : pour tout point x il existe un voisinage U et une forme différentielle α tel que $\omega|_U = d\alpha$.

toujours de l'avantage à utiliser ces constantes à la place des autres constantes a, b, c, etc.» [Lag11, volume II, page 76], n'utilisera pratiquement pas ces coordonnées canoniques. En particulier, la carte (a, b, c, h, i, k) n'est pas canonique.

Revenons à la méthode de la variation des constantes telle qu'elle est présentée plus haut, et en particulier à la formule (14). Nous pouvons en donner une justification en termes plus actuels. Considérons l'espace Y des conditions initiales du système étudié, c'est-à-dire l'espace des triplets $y = (t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ où $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + X, \tag{43}$$

sont les courbes intégrales du feuilletage défini sur Y par:

$$y \mapsto \mathbf{R} \cdot \xi \quad \text{avec} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ -\mathbf{r}/r^3 + X \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Le vecteur ξ se décompose en $\xi_0 + \chi$:

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ -\mathbf{r}/r^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X \end{pmatrix}. \tag{45}$$

L'espace des mouvements képlériens est l'espace quotient $\mathcal{K} = Y/\mathbf{R} \cdot \xi_0$, c'est-à-dire l'espace des courbes intégrales du feuilletage $y \mapsto \mathbf{R} \cdot \xi_0$.

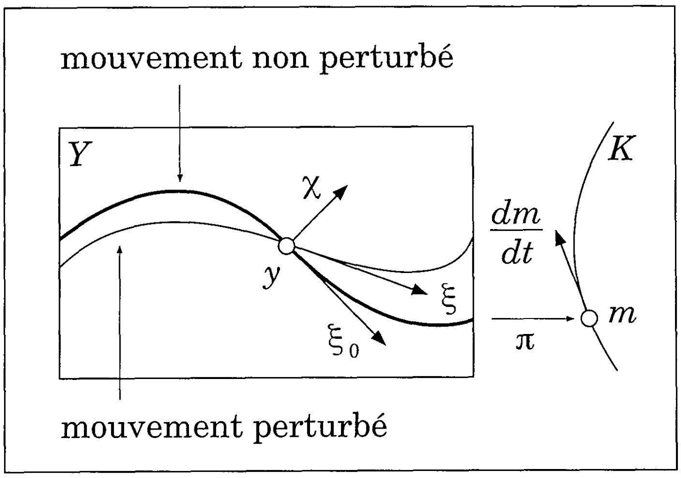

FIGURE 3
Projection de Y sur $\mathcal{K}$

Considérons alors une feuille du feuilletage $y \mapsto \mathbf{R} \cdot \xi$ passant par $y = (t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Cette courbe se projette sur l'espace des mouvements képlériens $\mathcal{K}$, son équation est alors :

$$\frac{dm}{dt} = D\pi_y(\xi) = D\pi_y(\xi_0) + D\pi_y(\chi), \tag{46}$$

où $\pi : y \mapsto m$ est la projection de Y sur son quotient et D désigne l'application linéaire tangente. Or, par construction : $D\pi_y(\xi_0) = 0$, il reste donc $dm/dt = D\pi_y(\chi)$. Un petit dessin vaut parfois mieux qu'un long discours, voir figure 3. C'est la famille d'équations (15). Enfin, transformée en la famille d'équations (21), elle s'écrit encore :

$$\frac{dm}{dt} = \omega^{-1}(d\Omega), \tag{47}$$

où $d\Omega$ désigne la différentielle de Ω. Par analogie avec le cas euclidien, comme ω est inversible, on appelle *gradient symplectique* de la fonction Ω le champ de vecteurs $\omega^{-1}(d\Omega)$. L'équation différentielle qui décrit la variation des constantes devient après ces conventions de langage :

$$\frac{dm}{dt} = \operatorname{grad}(\Omega). \tag{48}$$

L'évolution du mouvement m, perturbé par le potentiel Ω, est donc la courbe intégrale du gradient symplectique du potentiel de perturbation.

CONCLUSION

La partie la plus douteuse du travail de Lagrange concerne sûrement la méthode d'approximation utilisée. Je voudrais à ce propos souligner qu'hormis ces méthodes d'approximation les conclusions de Lagrange sont rigoureusement établies même si la présentation qu'il en a faite, et que j'ai essayé de reproduire ici, ne respecte pas les canons actuels de la mathématique. En ce sens, les transformations qu'il apporte aux équations initiales ne sont pas d'une grande utilité puisque celles qu'il obtient leur sont absolument équivalentes. Laissons-le parler :

> « Ainsi on peut regarder les équations précédentes entre les nouvelles variables a, b, c, etc. comme les transformées des équations en x, y, z ; mais ces transformations seraient peu utiles pour la solution générale du problème. Leur grande utilité est lorsque la solution rigoureuse est impossible, et que les forces perturbatrices sont très petites; elles fournissent alors un moyen d'approximation. »