5. Exemples d'utilisation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **43 (1997)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

vérifiée pour $\Re(z) > 1$, par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$. La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à z. $\square$

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour $z = 1$ en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164) :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^k \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n}\,.$$

5. EXEMPLES D'UTILISATION

5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION ψ

La fonction ψ vérifie l'équation :

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}\,.$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. §3.1), on a pour $\Re(z) > -1$:

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z}\,.$$

Supposons $|z| < 1$ et posons $f(x) = \frac{x}{1+xz}$, on a

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction f :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k\,,$$

de rayon de convergence $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$, permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k\geq 1} (-1)^k z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right)\,.$$

On en déduit le développement de ψ :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k\geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k)\, z^{k-1}\,.$$

5.2. Calcul de $\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n)$

Proposition 5.1. *Si q désigne un entier naturel ≥ 1, alors:*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} - \frac{1}{(2q+1)} \langle B_{2q+1}, \psi \rangle ,$$

avec

$$\langle B_{2q+1}, \psi \rangle = \int_0^1 B_{2q+1}(x)\, \psi(x)\, dx .$$

Démonstration. On commence par montrer le

Lemme 5.1. *Si a est telle que $a(0) = \partial a(0) = \cdots = \partial^{2q-1}a(0) = 0$, alors*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \int_0^1 a(t)\, dt + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x)\, R_{\partial^{2q+1}a}(x)\, dx .$$

Démonstration. Soit $A(x) = \int_0^x a(t)\, dt$. On applique la formule d'Euler-MacLaurin avec reste intégral sur $[0,1]$ à la fonction R_A. Il vient:

$$\frac{\partial R_A(0) + \partial R_A(1)}{2} = \sum_{n\geq 1}^{q} \left[\frac{B_{2n}}{2n!} \partial^{2n} R_A \right]_0^1 + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x)\, \partial^{2q+2} R_A(x)\, dx .$$

Comme $[\partial^{2n} R_A]_0^1 = 0$ pour tout $n \leq q$, on a:

$$\frac{\partial R_A(0) + \partial R_A(1)}{2} = \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x)\, \partial^{2q+2} R_A(x)\, dx . \cdot$$

En utilisant la propriété $R_{\partial^n f} = \partial^n R_f + \partial^{n-1} f(1)$, on obtient:

$$R_a(1) = \int_0^1 a(t)\, dt + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x)\, R_{\partial^{2q+1}a}(x)\, dx . \qquad \square$$

On applique le lemme à la fonction $a(x) = x^{2q} \ln(x)$, cette fonction vérifie

$$\int_0^1 a(t)\, dt = -\frac{1}{(2q+1)^2} \quad \text{et} \quad \partial^{2q+1} a(x) = \frac{(2q)!}{x} \cdot \qquad \square$$

REMARQUE 9. D'après le corollaire 4.1 (cf. §4.7), on a aussi :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q}\ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} - \zeta'(-2q)\,.$$

En dérivant l'équation fonctionnelle de la fonction ζ :

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\,\zeta(1-z)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right),$$

on obtient pour q entier ≥ 1 l'égalité (cf. [B1] pp. 273–276) :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q}\ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} + (-1)^{q+1}\frac{(2q)!}{2(2\pi)^{2q}}\,\zeta(2q+1)\,.$$

De la proposition précédente, on déduit alors l'égalité :

$$\langle B_{2q+1}, \psi\rangle = \frac{(-1)^q}{2}\,(2q+1)\,\frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\,\zeta(2q+1)\,.$$

REMARQUE 10. Pour $|x| < 1$, on a le développement :

$$-\frac{\pi}{2}\cot(\pi x) = -\frac{1}{2x} + \sum_{k\geq 1}\zeta(2k)\,x^{2k-1}\,.$$

Posons :

$$f(x) = -\frac{1}{2x} - \gamma - \sum_{k\geq 1}\zeta(2k+1)\,x^{2k}\,.$$

D'après le développement de ψ vu au paragraphe précédent, on a la décomposition :

$$\psi(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}\cot(\pi x)\,.$$

La fonction $x \mapsto \cot(\pi x)$ est une fonction impaire par rapport au point $\frac{1}{2}$. De la formule de réflexion :

$$\psi(1-x) = \psi(x) + \pi\cot(\pi x)\,,$$

on déduit que la fonction f est une fonction paire par rapport au point $\frac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto B_{2q+1}(x)$ étant impaire par rapport au point $\frac{1}{2}$, il résulte alors de la décomposition de ψ précédente les égalités :

$$\langle B_{2q+1}, \psi\rangle = -\frac{\pi}{2}\langle B_{2q+1}, \cot(\pi x)\rangle \quad \text{et} \quad \langle B_{2q+1}, f\rangle = 0\,,$$

ce qui se traduit par les deux systèmes infinis d'équations:

$$\sum_{k\geq 1} \zeta(2k)\left\langle x^{2k-1}, B_{2q+1}\right\rangle = r_q + \frac{(-1)^q}{2}(2q+1)\frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\zeta(2q+1),$$

$$\sum_{k\geq 1} \zeta(2k+1)\left\langle x^{2k}, B_{2q+1}\right\rangle = -r_q,$$

avec $r_q = \left\langle \frac{1}{2x}, B_{2q+1}\right\rangle$.

5.3. Une solution de l'équation de la chaleur

En dérivant sous le signe $\sum^{\mathcal{R}}$, on vérifie aisément que la fonction

$$u(t,x,y) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4(n+t)}}$$

est solution de l'équation de la chaleur:

$$\partial_t u = \partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u.$$

D'après le noyau de l'équation de la chaleur, on en déduit que

$$u(1,0,0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}}^{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} u(0,x,y)\,dxdy,$$

c'est-à-dire, après passage en coordonnées polaires:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1} = \int_0^\infty e^{-u}\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}}\,du.$$

Or, d'après l'exemple 13 (cf. §4.6), on sait que:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right)\frac{u^k}{k!},$$

et d'autre part:

$$\gamma = 1 - \ln(2) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit l'identité:

$$\ln(2) - 1 = \int_0^\infty e^{-u}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right)\frac{u^k}{k!}\,du,$$

qui traduit le fait que la série $\sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right)$ est Borel-sommable et que

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{B}}(-1)^k\left(\zeta(k+1)-\frac{1}{k}\right)=\ln(2)-1\,,$$

où $\sum^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel de la série.

6. Interpolation de Newton et sommation de Ramanujan

Étant donnée une suite $(a_n)_{n\geq 1}$, il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction a telle que $a(n)=a_n$ pour tout $n\geq 1$. On a la *formule d'interpolation de Newton*:

$$a(x)=a(1)+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}(x-1)(x-2)\dots(x-n)\,.$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences n-ièmes:

$$\Delta^n a(1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,C_n^k\,a_{k+1}\,.$$

Du développement de Newton de a :

$$a(x)=a(1)+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}(x-1)(x-2)\dots(x-n)\,,$$

on déduit formellement l'égalité:

$$\sum_{k\geq 1}a(k)=a(1)\sum_{k\geq 1}1+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}\sum_{k\geq 1}(k-1)(k-2)\dots(k-n)\,.$$

Calculons à présent $\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}}(k-1)(k-2)\dots(k-n)$. De l'équation aux différences:

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)-x(x-1)\dots(x-n)=-(n+1)(x-1)\dots(x-n)\,,$$

il découle que:

$$R_{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}=-\frac{1}{n+1}(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)+I_{n+1}/(n+1)\,,$$

avec:

$$I_{n+1}=\int_0^1 x(x-1)\dots(x-n)dx\,.$$

On a donc: