

# 1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **42 (1996)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## THE ZERO-IN-THE-SPECTRUM QUESTION

by John LOTT

ABSTRACT. This is an expository article on the question of whether zero lies in the spectrum of the Laplace-Beltrami operator acting on differential forms on a manifold.

### 1. INTRODUCTION

Let  $M$  be a complete connected oriented Riemannian manifold. The Laplace-Beltrami operator  $\Delta_p$  acts on the square-integrable  $p$ -forms on  $M$ . We asked the following question in 1991 :

ZERO-IN-THE-SPECTRUM QUESTION. Is zero always in the spectrum of  $\Delta_p$  for some  $p$  ?

To our knowledge, nobody has found a counterexample. The question was also raised by Gromov in the case of a contractible manifold with a discrete cocompact group of isometries ([15], p. 21).

Being able to answer the above question is a first step toward understanding the spectrum of the Laplace-Beltrami operator. We would also like to be able to say whether or not zero is in the spectrum of  $\Delta_p$  for a given  $p$ . This problem is partly topological in nature and partly geometric, in a sense which will be made precise later. In fact, it is equivalent to knowing the (unreduced)  $L^2$ -cohomology of  $M$ . The study of  $L^2$ -cohomology touches on many branches of mathematics, including combinatorial group theory, topology, differential geometry and algebraic geometry. It is most commonly considered when  $M$  is the universal cover of a compact manifold or when  $M$  is a finite-volume

Hermitian locally symmetric space. We refer to [22, 26] and [30] for surveys of these two cases. In this article we will instead emphasize general complete Riemannian manifolds and give some partial positive answers to the zero-in-the-spectrum question.

The sections of the article are :

1. Introduction
2. Definition of  $L^2$ -Cohomology
3. General Properties of  $L^2$ -Cohomology
4. Very Low Dimensions
  - 4.1. One Dimension
  - 4.2. Two Dimensions
5. Universal Covers
  - 5.1. Big and Small Groups
  - 5.2. Two and Three Dimensions
  - 5.3. Four Dimensions
  - 5.4. More Dimensions
6. Topologically Tame Manifolds

In what follows, all manifolds will be smooth, connected, oriented and of positive dimension. All maps between manifolds will be orientation-preserving. Unless otherwise indicated, all Riemannian manifolds will be complete.

We have tried to give as many complete proofs as reasonably possible. All unattributed results are of unknown origin or are due to the author. I thank Wolfgang Lück for conversations on some of the topics discussed herein. I thank Marie-Claude Vergne for making the figures. This article is based on lectures given at the Troisième Cycle Romand "On the Conjecture of the Zero in the Spectrum" held at Les Diablerets, Switzerland, March, 1996. I warmly thank Alain Valette and the other organizers and participants of the meeting.