

1. Rappels et notations (voir [4] ou [7])

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION

par Eva BAYER-FLUCKIGER

INTRODUCTION

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit q une forme quadratique anisotrope sur k . Si E est une extension de k , on note q_E la forme quadratique obtenue par extension des scalaires à E . On dit que q devient isotrope sur E si la forme q_E est isotrope.

Soit $k[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k . Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible, et notons $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_m]/(f)$. Le but de cette note est de présenter un critère nécessaire et suffisant pour que q devienne isotrope sur $k(f)$, et d'en donner quelques applications. Sous une forme légèrement différente, ce critère avait été obtenu par Witt [9].

Je remercie T. Y. Lam, A. Merkurjev, A. Pfister et J.-P. Tignol pour leurs remarques sur des versions précédentes de ce travail.

1. RAPPELS ET NOTATIONS (voir [4] ou [7])

Toutes les formes quadratiques considérées sont supposées *non dégénérées*. Pour $a_1, \dots, a_n \in k^*$, on note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme quadratique $a_1 X_1^2 + \dots + a_n X_n^2$. On dit qu'une forme quadratique $q: V \rightarrow K$ est *isotrope* s'il existe $x \in V$, $x \neq 0$, tel que $q(x) = 0$. Sinon, on dit qu'elle est anisotrope. Par exemple, le *plan hyperbolique* $H = \langle 1, -1 \rangle$ est isotrope.

Si q' et q'' sont deux formes quadratiques, on note $q' \oplus q''$ leur somme orthogonale. On dit que la forme quadratique q *contient* q' s'il existe une forme quadratique q'' telle que $q \simeq q' \oplus q''$.

Si q est isotrope, alors q contient au moins un plan hyperbolique. On dit que q est une *forme hyperbolique* (ou forme neutre) si q est une somme orthogonale de plans hyperboliques.

Pour toute forme quadratique q , on note $G(q) \subset k^*/k^{*2}$ le groupe des multiplicateurs de similitude de q :

$$G(q) = \{ \alpha \in k^*/k^{*2} \mid \alpha \cdot q \simeq q \} .$$

Soit $D(q) \subset k^*/k^{*2}$ l'ensemble des éléments représentés par q , c'est-à-dire l'ensemble des $\alpha \in k^*/k^{*2}$ tels qu'il existe $v \in V$ avec $q(v) = \alpha$.

Remarquons que si q représente 1, alors $G(q) \subset D(q)$.

Soit $\langle D(q) \rangle$ le sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par $D(q)$. (Ce groupe est égal au groupe des *normes spinorielles* de q (voir par exemple [4], p. 109), mais cette interprétation ne jouera aucun rôle dans la suite).

Soient $a_1, \dots, a_r \in k^*$, et posons $\ll a_1, \dots, a_r \gg = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_r \rangle$. C'est une forme à 2^r variables, appelée la r -forme de Pfister associée à a_1, \dots, a_r .

Si q est une forme de Pfister, alors $G(q) = D(q) = \langle D(q) \rangle$ (cf. [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, cor. 1.7).

2. CRITÈRES

Soit $k[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k . On ordonne les monômes de $k[X_1, \dots, X_m]$ par l'ordre lexicographique. On dit que $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est *unitaire* si le coefficient du terme de plus haut degré de f est égal à 1.

Si f est irréductible, on note $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_m]/(f)$.

Soit q une forme anisotrope de dimension n . On s'intéressera aux extensions $E = k(f)$ de k sur lesquelles q devient isotrope. Si q_E est isotrope, alors il en est de même de $\alpha \cdot q_E$, pour tout $\alpha \in k^*$. On peut donc supposer que q représente 1.

Soient $G_m(q) = G(q_{k(X_1, \dots, X_m)})$, $D_m(q) = D(q_{k(X_1, \dots, X_m)})$, et $\langle D_m(q) \rangle = \langle D(q_{k(X_1, \dots, X_m)}) \rangle$.

Le théorème 1 et son corollaire sont des reformulations de résultats de Witt [9]:

THÉORÈME 1. *Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = a f_1 \dots f_r$.*