1. Rappels et notations (voir [4] ou [7])

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 41 (1995), p. 111-122

FORMES QUADRATIQUES DEVENANT ISOTROPES SUR UNE EXTENSION

par Eva BAYER-FLUCKIGER

INTRODUCTION

Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit q une forme quadratique anisotrope sur k. Si E est une extension de k, on note q_E la forme quadratique obtenue par extension des scalaires à E. On dit que q *devient isotrope* sur E si la forme q_E est isotrope.

Soit $k[X_1, \dots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k. Soit $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ un polynôme irréductible, et notons $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_m]/(f)$. Le but de cette note est de présenter un critère nécessaire et suffisant pour que q devienne isotrope sur $k(f)$, et d'en donner quelques applications. Sous une forme légèrement différente, ce critère avait été obtenu par Witt [9].

Je remercie T.Y. Lam, A. Merkurjev, A. Pfister et J.-P. Tignol pour leurs remarques sur des versions précédentes de ce travail.

1. RAPPELS ET NOTATIONS (voir [4] ou [7])

Toutes les formes quadratiques considérées sont supposées *non dégénérées*. Pour $a_1, \dots, a_n \in k^*$, on note $<a_1, \dots, a_n>$ la forme quadratique $a_1 X_1^2 + \dots + a_n X_n^2$. On dit qu'une forme quadratique $q: V \to K$ est *isotrope* s'il existe $x \in V$, $x \neq 0$, tel que $q(x) = 0$. Sinon, on dit qu'elle est anisotrope. Par exemple, le *plan hyperbolique* $H = <1, -1>$ est isotrope.

Si q' et q'' sont deux formes quadratiques, on note $q' \oplus q''$ leur somme orthogonale. On dit que la forme quadratique q *contient* q' s'il existe une forme quadratique q'' telle que $q \simeq q' \oplus q''$.

Si q est isotrope, alors q contient au moins un plan hyperbolique. On dit que q est une *forme hyperbolique* (ou forme neutre) si q est une somme orthogonale de plans hyperboliques.

Pour toute forme quadratique q, on note $G(q) \subset k^*/k^{*2}$ le groupe des multiplicateurs de similitude de q:

$$G(q) = \{\alpha \in k^*/k^{*2} \mid \alpha \,.\, q \simeq q\}\,.$$

Soit $D(q) \subset k^*/k^{*2}$ l'ensemble des éléments représentés par q, c'est-à-dire l'ensemble des $\alpha \in k^*/k^{*2}$ tels qu'il existe $v \in V$ avec $q(v) = \alpha$.

Remarquons que si q représente 1, alors $G(q) \subset D(q)$.

Soit $<D(q)>$ le sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par $D(q)$. (Ce groupe est égal au groupe des *normes spinorielles* de q (voir par exemple [4], p. 109), mais cette interprétation ne jouera aucun rôle dans la suite).

Soient $a_1, \ldots, a_r \in k^*$, et posons $\langle\langle a_1, \ldots, a_r \rangle\rangle = <1, a_1> \otimes \ldots \otimes <1, a_r>$. C'est une forme à 2^r variables, appelée la r-forme de Pfister associée à $a_1, \ldots, a_r$.

Si q est une forme de Pfister, alors $G(q) = D(q) = <D(q)>$ (cf. [7], chap. 2, §10 ou [4], chap. 10, cor. 1.7).

2. Critères

Soit $k[X_1, \ldots, X_m]$ l'anneau des polynômes à m variables sur k. On ordonne les monômes de $k[X_1, \ldots, X_m]$ par l'ordre lexicographique. On dit que $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ est *unitaire* si le coefficient du terme de plus haut degré de f est égal à 1.

Si f est irréductible, on note $k(f)$ le corps des fractions de $k[X_1, \ldots, X_m]/(f)$.

Soit q une forme anisotrope de dimension n. On s'intéressera aux extensions $E = k(f)$ de k sur lesquelles q devient isotrope. Si q_E est isotrope, alors il en est de même de $\alpha \cdot q_E$, pour tout $\alpha \in k^*$. On peut donc supposer que q *représente* 1.

Soient $G_m(q) = G(q_{k(X_1, \ldots, X_m)})$, $D_m(q) = D(q_{k(X_1, \ldots, X_m)})$, et $<D_m(q)> = <D(q_{k(X_1, \ldots, X_m)})>$.

Le théorème 1 et son corollaire sont des reformulations de résultats de Witt [9]:

THÉORÈME 1. *Soit q une forme quadratique anisotrope qui représente 1. Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_m]$ et soient $a \in k^*$, $f_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ irréductibles, unitaires et distincts tels que $f = a f_1 \ldots f_r$.*