2. A Lemma about mass distribution AND SUCCESSIVE TRANSLATIONS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

constructed by closed dyadic cubes. The graph of a real valued function $f \in C[0, 1]$ is denoted by graph (f). By a dyadic cube we mean a cube which is the Cartesian product of dyadic intervals. If Q is an arbitrary dyadic closed cube, then the band of type $\{(x, y): (x, z) \in Q \text{ for some } z \in \mathbf{R}\}$ is called a dyadic band. In our construction the dyadic bands of width 2^{-2p} play a special role. They are called bands of generation $p, p = 0, 1, 2, \ldots$.

Acknowledgement. We would like to thank the referee for helpful suggestions.

1. A Lemma about mass distribution

By a mass distribution on a subset A of $\mathbf{R}^2$ we mean a measure μ on A such that $0 < \mu(A) < \infty$.

LEMMA 1. *Let f be a real valued measurable function defined on $[0, 1]$. Then there is a mass distribution μ on $F := \operatorname{graph}(f)$ such that*

1) *for any two subintervals I and I' of $[0, 1]$, with $m(I) = m(I')$,*

$$\mu(I \times \mathbf{R}) = \mu(I' \times \mathbf{R})$$

and

2) *if for two Borel sets B_1 and B_2 in $[0, 1] \times \mathbf{R}$ there exists $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ such that*

$$B_1 \cap F + (x_0, y_0) = B_2 \cap F$$

then

$$\mu(B_1) = \mu(B_2) .$$

Proof. Let B be an arbitrary Borel set in $\mathbf{R}^2$. Define

$$\mu(B) = m(\tilde{f}^{-1}(B)) . \tag{5}$$

Then it is obvious that μ is a mass distribution on $\operatorname{graph}(f)$ and 1) and 2) follow from the translation invariance of the Lebesgue measure.

2. A Lemma about mass distribution and successive translations

LEMMA 2. *Let $g(y) \geqslant 0$ and $g(y) \in L^1(\mathbf{R})$. If I is a finite interval and d is a positive real number then*

$$\int_I \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(y - nd)\, dy < \left(1 + \operatorname{int} \frac{m(I)}{d}\right) \cdot \| g \| . \tag{6}$$

Proof. It suffices to assume that $I = [0, m(I)]$. The general case will then follow by a change of variables. If we use the notation $M = \operatorname{int}\frac{m(I)}{d}$ we get

$$\int_I \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(y-nd)dy \leqslant \sum_{m=0}^{M} \int_{m\cdot d}^{(m+1)d} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(y-nd)dy$$

$$= \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{m\cdot d}^{(m+1)d} g(y-nd)dy = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(m-n)d}^{(m-n+1)d} g(t)dt \tag{7}$$

$$= \sum_{m=0}^{M} \|g\| = \left(1 + \operatorname{int}\left(\frac{m(I)}{d}\right)\right)\|g\| .$$

3. Hausdorff measure, net measure and Hausdorff dimension

This section presents standard results and definitions; see for example [FAL1].

The α-dimensional Hausdorff measure of a subset A of $\mathbf{R}^n$ is defined by

$$H^\alpha(A) = \lim_{\delta\to 0} \inf_{\{U_i\}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^\alpha , \tag{8}$$

where $\{U_i\}_1^\infty$ is a covering of A with $|U_i| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots$, and the infimum is taken over all such coverings. The unique number α_0 such that $\alpha < \alpha_0$ implies $H^\alpha(A) = +\infty$ and $\alpha_0 < \alpha$ implies $H^\alpha(A) = 0$ is by definition the Hausdorff dimension of A.

The net measure $M^\alpha(A)$ of A is defined similarly except that the coverings $\{U_i\}$ consist of closed dyadic cubes. It follows that there exists a constant $c_1 > 0$ such that

$$c_1 M^\alpha(A) \leqslant H^\alpha(A) \leqslant M^\alpha(A) . \tag{9}$$

Since $M^\alpha(A)$ and $H^\alpha(A)$ must therefore yield identical dimensions for A it will suffice to work with dyadic cubes.

4. Mass distribution and Hausdorff dimension

The following well known (see e.g. [FAL2, p. 232]) mass distribution principle will be used in Section 5.