

## 2.5. Une famille de métriques visuelles sur X

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Soit maintenant  $\xi, \xi'$  deux points distincts de  $\partial X$ ,  $x$  un point de  $X$ , et  $p$  appartenant à  $(\xi\xi')$ . Suivant V. Kaimanovich [K], considérons l'expression:

$$\frac{1}{2}(B_\xi(x, p) + B_{\xi'}(x, p)) .$$

Elle est indépendante du point  $p$  choisi sur  $(\xi\xi')$ . On l'appellera produit de Gromov de  $\xi$  et  $\xi'$  relativement à  $x$ , et on la notera  $(\xi | \xi')_x$ . (Voir figure 1.)

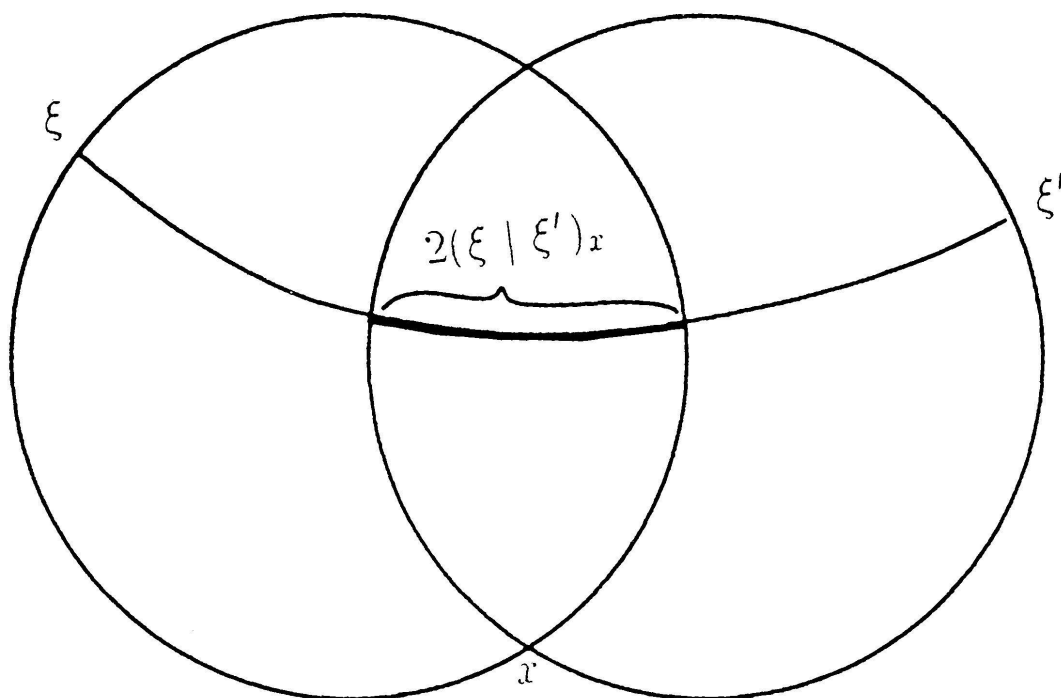


FIGURE 1

Notons que

$$(2.4.1) \quad (\xi | \xi')_x = (\xi' | \xi)_x$$

$$(2.4.2) \quad (\xi | \xi')_y = (\xi | \xi')_x - \frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y)) .$$

Le lecteur vérifiera sans peine la proposition suivante:

2.4.3. PROPOSITION. Soit  $y \in [x\xi)$  et  $y' \in [x\xi')$ . Le produit de Gromov  $(y | y')_x$  converge vers  $(\xi | \xi')_x$ , lorsque  $y$  et  $y'$  tendent respectivement vers  $\xi$  et  $\xi'$ .

## 2.5. UNE FAMILLE DE MÉTRIQUES VISUELLES SUR $\partial X$

Soit  $x$  une origine dans  $X$ . Pour  $\xi, \xi' \in \partial X$ , définissons:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi | \xi')_x} \quad \text{si } \xi \neq \xi'$$

$$d_x(\xi, \xi') = 0 \quad \text{sinon .}$$

2.5.1. THÉORÈME.  $d_x$  est une métrique sur  $\partial X$ .

2.5.2. Remarque.  $d_x$  est une métrique visuelle de paramètres  $(x, e)$  (voir 1.5.1). En effet, l'expression

$$|(\xi | \xi')_x - d(x, (\xi \xi'))|$$

est majorée par une constante universelle (voir [G-H], chapitre 2, lemme 17).

Afin de montrer le théorème, nous introduisons un angle de comparaison, ou plutôt son sinus: Soit  $y, y'$  deux éléments de  $X - \{x\}$ . Soit  $(\bar{x} \bar{y} \bar{y}')$  un triangle de comparaison de  $(xyy')$  dans  $\mathbf{H}_R^2$ . Posons:

$$(2.5.3) \quad \alpha_x(y, y') = \sin \frac{\widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{y}'}}{2} .$$

On peut également exprimer  $\alpha_x(y, y')$  sans recourir à un triangle de comparaison. En effet, d'après les formules de trigonométrie dans  $\mathbf{H}_R^2$ , on a:

$$\alpha_x(y, y') = \left( \frac{\text{ch } |y - y'| - \text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh } |x - y'|} \right)^{1/2} .$$

Le théorème découlera des deux lemmes suivants:

2.5.4. LEMME. Soit  $S(x, r)$  la sphère de  $X$ , de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Sur  $S(x, r)$ ,  $r > 0$ ,  $\alpha_x$  est une métrique.

2.5.5. Preuve de 2.5.4. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Soient donc  $y, z, t$  appartenant à  $S(x, r)$ . D'après la relation 2.5.3, les valeurs de  $\alpha$  appartiennent à  $[0, 1]$ . Aussi, pour montrer l'inégalité triangulaire:

$$\alpha_x(y, t) \leq \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) ,$$

supposons:

$$(1) \quad \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) < 1 .$$

Soit  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t} \in \mathbf{H}_R^2$ , tels que:

- a)  $(\bar{x} \bar{y} \bar{z})$  et  $(\bar{x} \bar{z} \bar{t})$  soient des triangles de comparaison de  $(xyz)$  et de  $(xzt)$ .
- b)  $(\bar{x} \bar{z})$  sépare  $\bar{y}$  et  $\bar{t}$  (voir figure 2).

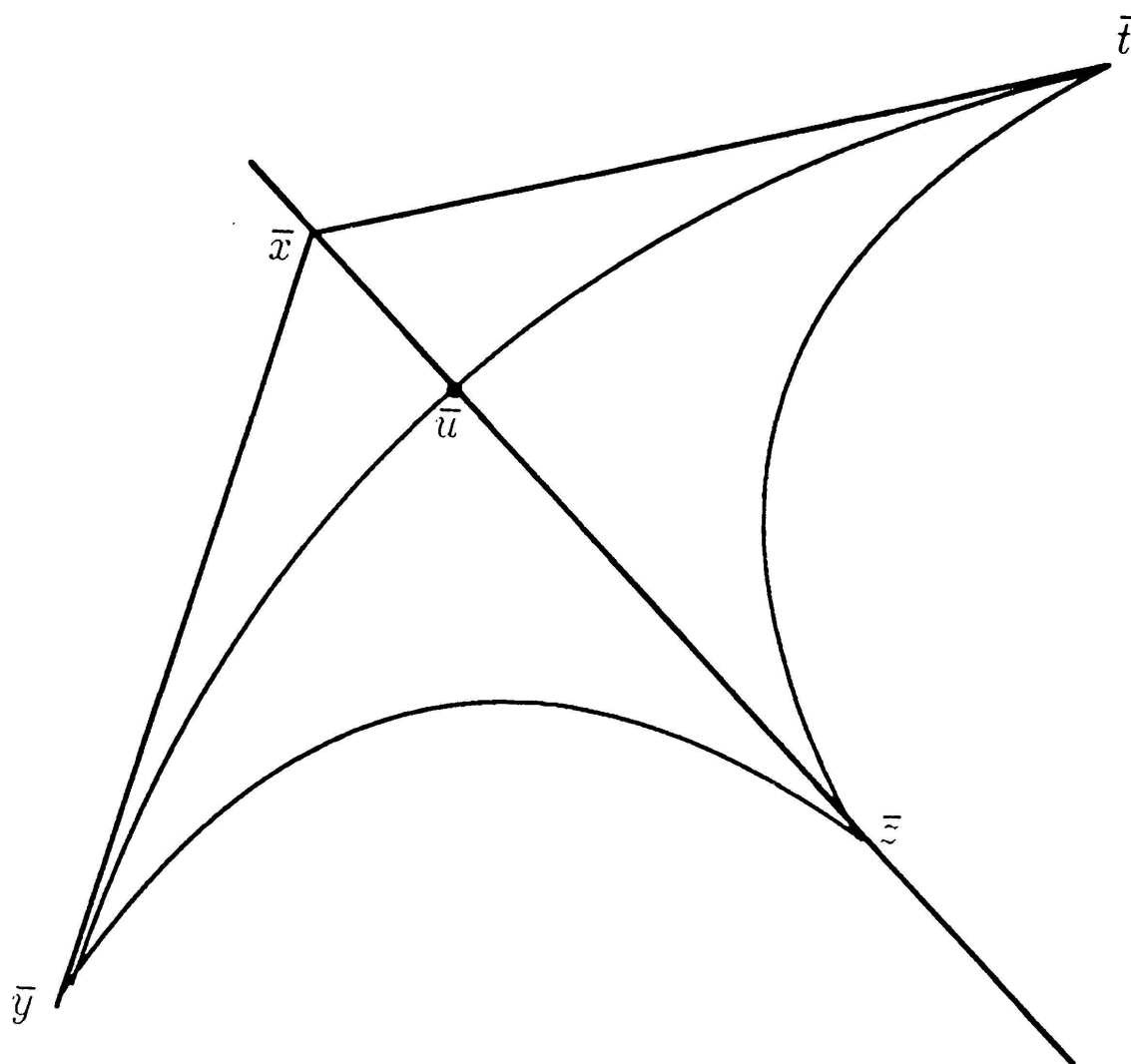


FIGURE 2

D'après 2.5.3, on a:

$$(2) \quad \alpha_x(y, z) = \sin \frac{\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{z}}}{2}, \quad \alpha_x(z, t) = \sin \frac{\widehat{\bar{z}\bar{x}\bar{t}}}{2}.$$

L'hypothèse (1) implique:

$$\widehat{\bar{y}\bar{x}\bar{z}} + \widehat{\bar{z}\bar{x}\bar{t}} < \pi,$$

de plus:

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{x} - \bar{z}| = |\bar{x} - \bar{t}|,$$

et  $(\bar{x}\bar{z})$  sépare  $\bar{y}$  et  $\bar{t}$ . Donc le segment  $[\bar{y}\bar{t}]$  coupe  $[\bar{x}\bar{z}]$  en un unique point  $\bar{u}$ . Soit  $u \in [xz]$ , le point correspondant à  $\bar{u}$ . L'inégalité triangulaire et l'inégalité CAT(-1) donnent alors:

$$\begin{aligned} |y - t| &\leq |y - u| + |u - t| \\ &\leq |\bar{y} - \bar{u}| + |\bar{u} - \bar{t}| \\ &= |\bar{y} - \bar{t}|. \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha_x(y, t) = \left( \frac{\text{ch } |y - t| - \text{ch}(|x - y| - |x - t|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh}(|x - t|)} \right)^{1/2} \\ \leq \left( \frac{\text{ch } |\bar{y} - \bar{t}| - \text{ch}(|\bar{x} - \bar{y}| - |\bar{x} - \bar{t}|)}{2 \text{sh } |\bar{x} - \bar{y}| \text{sh}(|\bar{x} - \bar{t}|)} \right)^{1/2} .$$

c'est-à-dire encore:

$$(3) \quad \alpha(y, t) \leq \sin \frac{\widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{t}}}{2} .$$

Or  $\widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{t}} = \widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{z}} + \widehat{\bar{y} \bar{x} \bar{t}}$ , et  $\sin(a + b) \leq \sin a + \sin b$ , pour  $a, b$  appartenant à  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Donc (2) et (3) donnent:

$$\alpha_x(y, t) \leq \alpha_x(y, z) + \alpha_x(z, t) . \quad \square$$

2.5.6. LEMME. Soient  $y \in [x\xi)$ ,  $y' \in [x\xi')$ , alors:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \xi \\ y' \rightarrow \xi'}} \alpha_x(y, y') = d_x(\xi, \xi') .$$

2.5.7. Preuve de 2.5.6. On a:

$$\alpha_x(y, y') = \left( \frac{\text{ch } |y - y'|}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh} |x - y'|} - \frac{\text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh} |x - y'|} \right)^{1/2} .$$

Un calcul montre que:

$$\frac{\text{ch}(|x - y| - |x - y'|)}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh} |x - y'|} = \frac{1}{2} (\coth |x - y| \coth |x - y'| - 1) .$$

Cette expression tend vers 0 lorsque  $y \rightarrow \xi, y' \rightarrow \xi'$ . Par ailleurs:

$$\frac{\text{ch } |y - y'|}{2 \text{sh } |x - y| \text{sh} |x - y'|} \sim e^{|y - y'| - |x - y| - |x - y'|} = e^{-2(y|y')_x} ,$$

or d'après la proposition 2.4.3, on a:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \xi \\ y' \rightarrow \xi'}} (y|y')_x = (\xi|\xi')_x .$$

D'où le lemme.  $\square$

2.5.8. *Preuve du théorème 2.5.1.* Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Elle résulte des lemmes 2.5.4 et 2.5.6.  $\square$

2.5.9. EXEMPLES.

a) Prenons  $X = \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$ . Soit  $x$  le centre du modèle en boule. Alors:

$$d_x(\xi, \xi') = \sin \frac{\widehat{\xi x \xi'}}{2}$$

est la moitié de la longueur du segment euclidien reliant  $\xi$  à  $\xi'$  (voir figure 3).

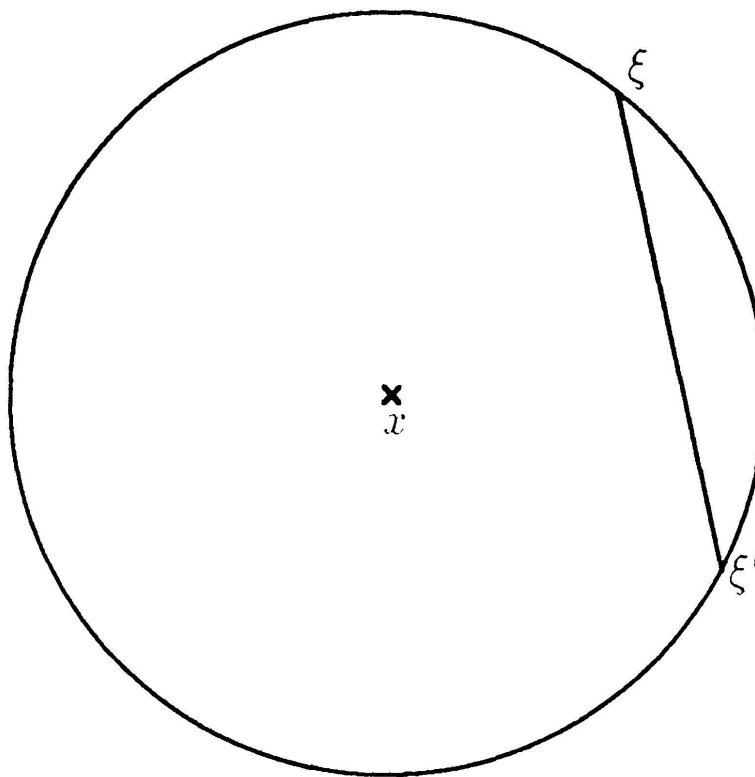


FIGURE 3

Ce n'est pas la métrique naturelle sur  $\partial X$ , qui est la métrique angulaire. Néanmoins elle lui est conforme, de facteur conforme constant égal à  $\frac{1}{2}$ .

b) Si  $X$  est un arbre réel:

$$d_x(\xi, \xi') = e^{-(\xi | \xi')_x},$$

où  $(\xi | \xi')_x$  est la longueur du trajet que font ensemble les deux rayons géodésiques issus de  $x$  et allant vers  $\xi$  et  $\xi'$  (voir figure 4).

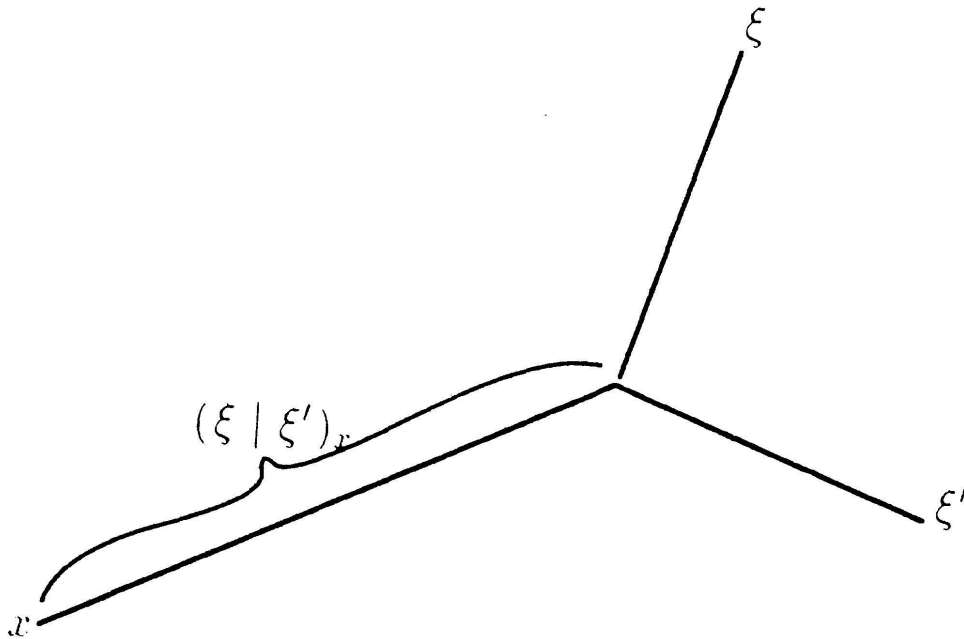


FIGURE 4

2.6. STRUCTURE CONFORME SUR  $\partial X$

Nous montrons maintenant que la famille de métriques  $\{d_x, x \in X\}$ , définit une structure conforme sur  $\partial X$ . On a :

2.6.1. PROPOSITION. Soit  $x$  une origine dans  $X$  et  $y, z$  deux éléments de  $X$ . La fonction sur  $(\partial X, d_x)$ , définie par :

$$\xi \mapsto B_\xi(y, z)$$

est lipschitzienne.

2.6.2. Preuve. D'après les relations 2.2.1 et 2.2.2, on a :

$$B_\xi(y, z) = -B_\xi(x, y) + B_\xi(x, z) .$$

Aussi, il suffit de montrer que la fonction :

$$\xi \mapsto B_\xi(x, y)$$

est lipschitzienne sur  $(\partial X, d_x)$ . D'après la définition des métriques  $d_x$  et d'après la relation 2.4.2, on a :

$$d_y(\xi, \xi') = d_x(\xi, \xi') e^{\frac{1}{2}(B_\xi(x, y) + B_{\xi'}(x, y))}$$

ou encore

$$(1) \quad B_\xi(x, y) = 2 \log d_y(\xi, \xi') - 2 \log d_x(\xi, \xi') - B_{\xi'}(x, y) .$$