

4.1 GROUPOÏDES ET n-RAPPORTS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. MULTIRAPPORTS

4.1 GROUPOÏDES ET n -RAPPORTS

Dans ce paragraphe, on fait quelques remarques sur des invariants liés au groupoïde \mathcal{G}_m associé à l'espace projectif $\mathbf{P}^m(F)$. Notons $\check{\mathbf{P}}^m(F)$ le dual projectif de $\mathbf{P}^m(F)$. Si $(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un élément de $(\mathbf{P}^m(F))^n \times (\check{\mathbf{P}}^m(F))^n$ tel que $\vec{\varphi}_i(\vec{x}_j) \neq 0$, où $(\vec{\quad})$ désigne un représentant vectoriel, on considère l'élément de F^\times

$$[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n] = \frac{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_1) \vec{\varphi}_2(\vec{x}_2) \dots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_n)}{\vec{\varphi}_1(\vec{x}_2) \vec{\varphi}_2(\vec{x}_3) \dots \vec{\varphi}_n(\vec{x}_1)}.$$

C'est un invariant projectif de la configuration constituée des n points x_i et des n hyperplans H_i associés aux φ_i . Remarquer que

$$[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}; \varphi_{\sigma(1)}, \dots, \varphi_{\sigma(n)}] = [x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n],$$

pour tout élément σ du groupe engendré par le cycle $(12 \dots n)$.

On appelle $[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n]$ le n -rapport de cette configuration; on le note aussi $[x_1, \dots, x_n; H_1, \dots, H_n]$. Si $m = 1$ et $n = 2$, on a exactement

$$[x_1, x_2; y_1, y_2] = r(x_1, x_2; y_1, y_2).$$

Pour $x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n$ comme ci-dessus, posons $a_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \cap H_i$ pour $i \neq n$ et $a_n = \langle x_1, x_n \rangle \cap H_n$.

PROPOSITION 4. *On a dans le groupoïde \mathcal{G}_m l'interprétation géométrique suivante du n -rapport*

$$[x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n] = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1,$$

où $f_i = x_i \xrightarrow{a_i} x_{i+1}$ pour $i \neq n$ et $f_n = x_{n+1} \xrightarrow{a_n} x_1$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'application linéaire $p^{-1}(x_i) \rightarrow p^{-1}(x_{i+1})$ dont le graphe est conjugué harmonique de $p^{-1}(a_i)$ par rapport à $p^{-1}(x_i)$ et $p^{-1}(x_{i+1})$ associe à \vec{x}_i le vecteur $\frac{\vec{\varphi}_i(\vec{x}_i)}{\vec{\varphi}_{i+1}(\vec{x}_{i+1})} \vec{x}_{i+1}$. \square

Montrons sur un exemple comment les n -rapports apparaissent naturellement dans certains invariants projectifs. Soit V un F -espace vectoriel de dimension finie et V^* son dual, si $\sigma \in S_n$ est une permutation, l'application multilinéaire

$$I_\sigma: V^n \times (V^*)^n \rightarrow F$$

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \vec{\varphi}_i(\vec{x}_{\sigma(i)})$$

est invariante sous l'action diagonale de $GL(V)$ dans $V^n \times (V^*)^n$ (il est bien connu [14] que ces fonctions jouent un rôle en théorie des invariants). Par suite, si $(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sont comme précédemment et si $\sigma, \mu \in S_n$, on obtient un invariant projectif $J_{\sigma, \mu}$ à valeurs dans F^\times en posant

$$J_{\sigma, \mu}(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \frac{I_\sigma(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)}{I_\mu(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)}$$

Soit alors

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) (j_1, j_2, \dots, j_l) \cdots (t_1, t_2, \dots, t_s)$$

la décomposition en cycles de la permutation $\sigma^{-1}\mu$, on vérifie facilement la relation

$$J_{\sigma, \mu}(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n) = [x_{\sigma(i_1)}, \dots, x_{\sigma(i_k)}; \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}] \cdot [x_{\sigma(j_1)}, \dots, x_{\sigma(j_l)}; \varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_l}] \cdots [x_{\sigma(t_1)}, \dots, x_{\sigma(t_s)}; \varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_s}] .$$

4.2 REMARQUES SUR UN INVARIANT DE GONCHAROV

Considérons $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, 2n$ points en position générale de $\mathbf{P}^{n-1}(F)$ et posons

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = [x_1, \dots, x_n; H_1, \dots, H_n] ,$$

où H_i est l'hyperplan $\langle y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n \rangle$; on obtient un invariant projectif qui vérifie en particulier

$$[[x_1, x_2; y_1, y_2]] = (r(x_1, x_2; y_1, y_2))^{-1} .$$

Soit «dét» le déterminant dans une base arbitraire de F^{n+1} , d'après la définition du n -rapport, on peut écrire

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = \frac{\prod_{i=1}^n \text{dét}(\vec{y}_1, \dots, \hat{\vec{y}}_i, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_i)}{\prod_{i=1}^n \text{dét}(\vec{y}_1, \dots, \hat{\vec{y}}_i, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{\tau(i)})} ,$$

où τ est la permutation cyclique $(12 \dots n)$; en particulier si on prend comme coordonnées homogènes de $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{matrix} ,$$

on a l'expression

$$[[x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n]] = \frac{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}{a_{12} a_{23} \cdots a_{n1}} .$$