1.2 Le groupoïde des points de $P^n(F)$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\hat{f}} x$ (resp. $y \xrightarrow{\hat{f}} x \xrightarrow{f} y$) par x (resp. y). La composition dans $\mathscr{L}$ s'obtient en composant les chemins; l'inverse de la classe de $x \xrightarrow{f} y$ est alors la classe de $y \xrightarrow{\hat{f}} x$.

Le groupoïde $\mathscr{G}$ se déduit de $\mathscr{L}$ en passant au quotient par les relations $\mathscr{R}$. Plus précisément, les relations $\mathscr{R}$ engendrent une famille de groupes $(G_x)_{x \in X}$, où G_x est un sous-groupe de $Aut_{\mathscr{L}}(x)$, satisfaisant à la condition

(*) pour tout morphisme $f : x \to y$ de $\mathscr{L}$, la conjugaison: $Aut_x \to Aut_y$, $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$, induit une bijection de G_x sur G_y;

on obtient alors $\mathscr{G}$ à partir de $\mathscr{L}$ en passant au quotient par la relation d'équivalence suivante sur les morphismes de $\mathscr{L}$

(**) pour $f, g \in Mor(x, y), f \sim g$ si $g^{-1} \circ f \in G_x$. □

DÉFINITION 1. *Pour* F *un corps et* $l \geqslant 1$, $\mathscr{V}_{n,l}$ *désigne le groupoïde dont les objets sont les sous-espaces de dimension* l *de* F^{n+1} *et les morphismes, les isomorphismes linéaires entre ces espaces. Pour* $l = 1$, *on note plus simplement ce groupoïde* $\mathscr{V}_n$.

Dans les paragraphes 1.2 et 2.1, on donne pour $n \geqslant 3l - 1$ une présentation par générateurs et relations du groupoïde $\mathscr{V}_{n,l}$, en termes de géométrie projective.

1.2 Le groupoïde des points de $\mathbf{P}^n(F)$

Dans la suite, F est un corps commutatif quelconque, en particulier on n'exclut pas le corps à deux éléments.

DÉFINITION 2. *Pour* $n \geqslant 2$, *on considère le groupoïde* $\mathscr{G}_n$ *défini par générateurs et relations comme suit:*

i) Les objets de $\mathscr{G}_n$ *sont les points de* $\mathbf{P}^n(F)$.

ii) L'ensemble des générateurs $\mathscr{F}$ *est constitué des flèches* $f = (x \xrightarrow{a} y)$, *où* x *et* y *sont des points distincts de* $\mathbf{P}^n(F)$ *et* a *est un point de la droite* $\langle x, y \rangle$ *distinct de* x *et* y.

iii) Les relations $\mathscr{R}$ *sont du type* $h = g \circ f$ *où* $f = (x \xrightarrow{a} y)$, $g = (y \xrightarrow{b} z)$ *et* $h = (x \xrightarrow{c} z)$ *sont comme sur la figure 1, c'est-à-dire que* x, y *et* z *sont en position générale et* c *est l'intersection des droites* $\langle x, z \rangle$ *et* $\langle a, b \rangle$.

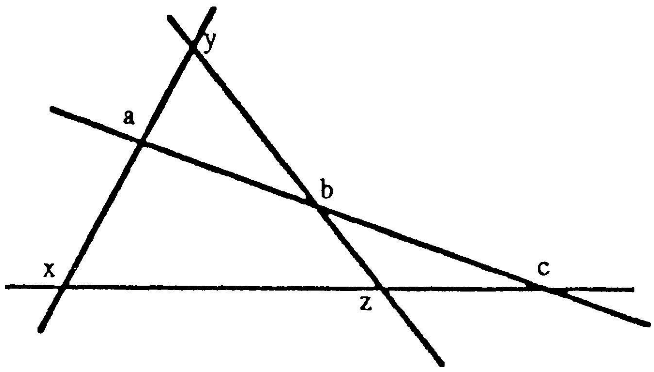

FIGURE 1

Un triangle comme sur la figure 1 est une cubique dégénérée; noter alors l'analogie avec la définition de la loi de groupe sur une cubique non singulière. On peut dire aussi que les relations $\mathscr{R}$ sont données par les configurations de Menelaüs: rappelons que le théorème de Menelaüs exprime l'alignement des points a, b, c, sur la figure 1, par la condition affine $\frac{ax}{ay}\frac{by}{bz}\frac{cz}{cx} = 1$.

On rappelle que si F a au moins trois éléments et si x, y, a, b sont quatre points distincts de $\mathbf{P}^n(F) = F \cup \{\infty\}$, il existe un unique élément $r(x, y; a, b) \in F^\times$ et une unique homographie $f \in PGL(2, F)$ tels que

$$(f(x), f(y), f(a), f(b)) = (\infty, 0, 1, r(x, y; a, b)) .$$

L'élément $r(x, y; a, b) = \frac{x-a}{x-b}\frac{y-b}{y-a}$ est le birapport des quatre points x, y, a, b; pour les généralités sur le birapport, voir par exemple [1].

Dans la suite on convient que $r(x, y; a, b) = 1$, si $a = b$.

Noter que le groupe projectif $PGL(n+1, F)$ opère naturellement dans $\mathscr{G}_n$ par automorphismes de groupoïdes.

THÉORÈME 1. *Le groupoïde* $\mathscr{G}_n$ *vérifie les propriétés suivantes*

1) Pour $x \neq y$, *si* $f = (x \overset{a}{\rightarrow} y)$ *alors* $f^{-1} = (y \overset{a}{\rightarrow} x)$.

2) Pour $x \neq y$, $Mor(x, y)$ *coïncide avec l'ensemble des générateurs de source* x *et de but* y.

3) Pour tout $x \in \mathbf{P}^n(F)$, *il existe un unique isomorphisme,* $t_x : Aut_{\mathscr{G}_n}(x) \rightarrow F^\times$, *tel que pour* $f = (x \overset{a}{\rightarrow} y)$ *et* $g = (y \overset{a}{\rightarrow} x)$, $t_x(g \circ f) = r(x, y; a, b)$. *De plus ces isomorphismes sont compatibles avec l'action de* $PGL(n+1, F)$ *dans* $\mathscr{G}_n$.

Ce théorème est en fait un corollaire du suivant.

THÉORÈME 2. *Il existe un isomorphisme de groupoïdes* $\varphi : \mathscr{G}_n \to \mathscr{V}_n$ *tel que, pour* $f = (x \overset{a}{\to} y)$ *et* $g = (y \overset{a}{\to} x)$, *on a* $\varphi(g \circ f) = r(x, y; a, b)$.

Avant de montrer ce dernier résultat, donnons deux illustrations géométriques du théorème 1.

Si $f = (x \overset{a}{\to} y)$ et $g = (y \overset{a}{\to} z)$ sont tels que x, y, z sont *distincts et alignés,* alors $g \circ f = (x \overset{c}{\to} z)$, où c est le point de $\langle x, y \rangle$ obtenu par la construction géométrique de la figure 2.

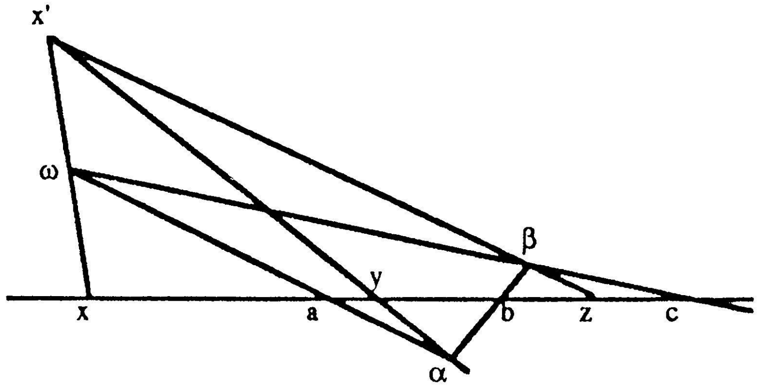

FIGURE 2

Détaillons cette construction: on choisit un point x' en dehors de la droite $\langle x, y \rangle$ et un point ω sur la droite $\langle x, x' \rangle$ distinct de x et x'. Le point α correspond alors a la composée $f \circ (x' \overset{\omega}{\to} x)$, le point β à $g \circ (f \circ (x' \overset{\omega}{\to} x))$ et le point c à

$$(g \circ (f \circ (x' \overset{\omega}{\to} x))) \circ (x \overset{\omega}{\to} x') .$$

L'associativité du groupoïde $\mathscr{G}_n$ et le point *1)* du théorème 1 montrent que cette dernière composition n'est autre que $g \circ f$. Le lecteur pourra considérer le cas particulier où F est le corps à deux éléments et constater que si x, y, z sont les trois points d'une droite de $\mathbf{P}^2(F)$, on a la relation $(y \overset{x}{\to} z) \circ (x \overset{z}{\to} y) = (x \overset{y}{\to} z)$. Rappelons que le plan projectif du corps à deux éléments est constitué de 7 points et 7 droites disposés comme sur la figure 3

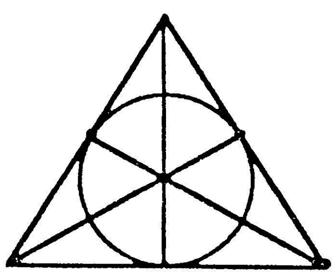

FIGURE 3

L'associativité, dans le cas de trois morphismes où les objets sont en position générale, correspond à la configuration de Desargues de la figure 4.

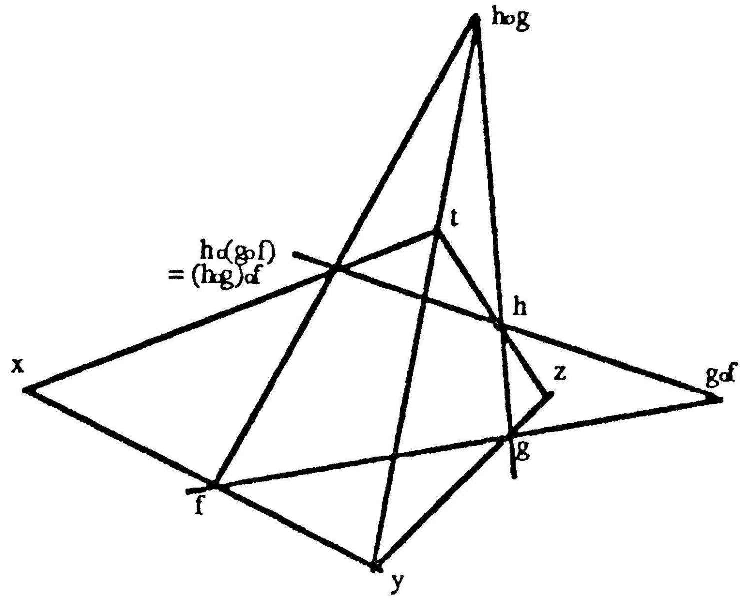

FIGURE 4

Rappelons le théorème de Desargues: si x, y, z et x', y', z' sont deux triangles de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(F)$, où $n \geqslant 2$, tels que x et x', y et y', z et z' soient distincts, alors les points $\langle x, y \rangle \cap \langle x', y' \rangle$, $\langle y, z \rangle \cap \langle y', z' \rangle$ et $\langle x, z \rangle \cap \langle x', z' \rangle$ sont alignés, si et seulement si les droites $\langle x, x' \rangle$, $\langle y, y' \rangle$ et $\langle z, z' \rangle$ sont concourrantes.

1.3 PREUVE DU THÉORÈME 2

Dans toute la suite, on note p l'application quotient $F^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbf{P}^n(F)$.

On va construire un morphisme de groupoïdes $\varphi : \mathscr{G}_n \to \mathscr{V}_n$, bijectif sur les ensembles d'objets. Pour prouver que φ est un isomorphisme, il suffira de vérifier que les morphismes induits $Aut(x) \to Aut(\varphi(x))$ sont des isomorphismes pour tout x de $\mathbf{P}^n(F)$.

On note $\varphi(x)$ la droite $p^{-1}(x)$. Si $f = (x \xrightarrow{a} y)$ est un générateur de $\mathscr{G}_n$, on définit $\varphi(f)$ comme l'isomorphisme linéaire: $p^{-1}(x) \to p^{-1}(y)$, dont le graphe est la droite conjuguée harmonique de $p^{-1}(a)$ par rapport à $p^{-1}(x)$ et $p^{-1}(y)$; autrement dit, $\varphi(f)$ est caractérisé par le fait que pour un vecteur non nul $\vec{x} \in p^{-1}(x)$, $\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x}$ appartient à $p^{-1}(a)$.

Pour voir que ces données induisent un morphisme $\varphi : \mathscr{G}_n \to \mathscr{V}_n$, vérifions la comptabilité avec les relations $\mathscr{R}$. Soit f, g, h comme sur la figure 1, on a

$$\varphi(f)(\vec{x}) - \vec{x} \in p^{-1}(a) \quad et \quad \varphi(g)(\varphi(f)(\vec{x})) - \varphi(f)(\vec{x}) \in p^{-1}(b) ,$$