# IV. Etude des relations $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ et $Q_\sigma = 0$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

THÉORÈME 4. *$\mathscr{A}$ est le groupe engendré par $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$ et $\rho$.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer de façon répétitive le lemme précédent pour se ramener au lemme 2.

THÉORÈME 5. *L'ensemble des $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ tels que $Q_\sigma = 1$ est l'ensemble des automorphismes de $F$.*

*Démonstration.* Dire que $Q_\sigma = 1$ équivaut à dire $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Si $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$, le lemme 3 permet de montrer l'existence d'un $\tau \in <\alpha, \beta, \gamma>$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma \in \{\theta, \rho\}$. Mais, en vertu des lemmes II.3 et II.4, on a alors $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Il en résulte (théorème II.5) que $\tau \circ \sigma$ est un automorphisme, donc aussi $\sigma$.

LEMME 6. *Si $i_w$ désigne l'automorphisme intérieur $u \to wuw^{-1}$ de $F$. On a*

$$i_a = \beta\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha\beta \quad \text{et} \quad i_b = \alpha i_a \alpha .$$

*Démonstration.* Elle se fait par vérification directe.

THÉORÈME 7. *L'ensemble des automorphismes de $F$ est le groupe engendré par $\alpha, \beta$ et $\gamma$.*

*Démonstration.* Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$. Alors $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Comme précédemment, il existe $\tau \in <\alpha, \beta, \gamma>$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Le théorème II.1 montre alors $\tau \circ \sigma$ est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec $(a^{-1}, b^{-1})$, qui n'est autre que $(\alpha\beta)^2$. Le théorème résulte alors du lemme précédent.

*Remarque.* Ce théorème est un résultat ancien de Nielsen [5], [6], mais la démonstration que nous en donnons ne fait pas appel à la délicate théorie de la réduction de Nielsen.

## IV. ETUDE DES RELATIONS $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ ET $Q_\sigma = 0$ .

Notons $F^*$ l'ensemble des éléments $w$ de $F$ qui sont image d'un générateur par un automorphisme de $F$.

THÉORÈME 1. *Soit $\sigma$ et $\tau$ deux endomorphismes de $F$ tels que $\sigma(a), \sigma(b)$ et $\sigma(ab)$ soient dans $F^*$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1°) $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$

2°) $\tau(a), \tau(b)$ *et* $\tau(ab)$ *sont conjugués respectivement à* $\sigma(a)$ *ou* $\sigma(a)^{-1}, \sigma(b)$ *ou* $\sigma(b)^{-1}, \sigma(ab)$ *ou* $\sigma(ab)^{-1}$.

*Démonstration.* Il est clair que la seconde assertion implique la première, et ce sans qu'il soit nécessaire de faire d'hypothèses sur $\sigma$.

Supposons que l'on ait $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ et $\sigma(a) = \mu(a), \sigma(b) = \nu(b)$ et $\sigma(ab) = \xi(ab)$ (où $\mu$, $\nu$ et $\xi$ sont des automorphismes de $F$). On a alors $\Phi_{\mu^{-1}\sigma} = \Phi_{\mu^{-1}\tau}$, d'où en vertu du lemme II.4, $\mu^{-1}\tau(a) = ua^{\pm 1}u^{-1}$ pour un $u \in F$. Par suite $\tau(a) = \mu(u)\sigma(a)^{\pm 1}\mu(u)^{-1}$. On opère de même pour $\tau(b)$ et $\tau(ab)$.

THÉORÈME 2. *Pour des automorphismes* $\sigma$ *et* $\tau$ *de* $F$, *les assertions suivantes sont équivalentes:*

1°) $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$

2°) $\tilde{\sigma} = \pm \tilde{\tau}$

3°) $\tau = \sigma i_w$ *ou* $\tau = \sigma(\alpha\beta)^2 i_w$ *pour un* $w \in F$.

*Démonstration.* L'équivalence des assertions 1°) et 3°) est une simple reformulation du théorème II.1. L'équivalence de ces assertions avec la seconde résulte de la caractérisation, en termes de leurs matrices, des automorphismes intérieurs de $F$ ([6]).

PROPOSITION 3. *Si* $\sigma$ *est un endomorphisme de* $F$, *non injectif, il existe deux entiers* $m$ *et* $n$ *et un élément* $w$ *de* $F$ *tel que* $\sigma(a) = w^m$ *et* $\sigma(b) = w^n$.

*Démonstration.* On utilise la théorie de la réduction de Nielsen ([6], [7]). Etant donné $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ arbitraire, il existe un automorphisme $\mu$ de $F$ tel que l'une des éventualités suivantes se produise:

1°) Le couple $(\sigma\mu(a), \sigma\mu(b))$ est réduit au sens de Nielsen,

2°) $\sigma\mu(a)$ est réduit au sens de Nielsen et $\sigma\mu(b) = e$.

3°) $\sigma\mu(a) = \sigma\mu(b) = e$.

Dans le premier cas $\sigma\mu$ est injectif, d'où la proposition.

LEMME 4. *Soit* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in (R[x, y, z])^3$ *(où* $R$ *est un domaine d'intégrité de caractéristique nulle) tel que l'on ait* $\lambda \circ \psi = 0$. *Alors, il existe* $\tau \in \mathrm{Aut}\, F$ *tel que* $\Phi_\tau \circ \psi$ *ait sa première composante constante.*

*Démonstration.* On peut évidemment supposer que l'on a $d^0\psi_1 \leqslant d^0\psi_2 \leqslant d^0\psi_3$. La relation $\lambda \circ \psi = 0$ s'écrit $\psi_3(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = 4 - \psi_1^2 - \psi_2^2$, d'où l'on déduit $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \leqslant d^0\psi_2$. Supposons que l'on ait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) \geqslant d^0\psi_3$. On a alors $d^0\psi_2 = d^0\psi_3$ et $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3 \leqslant 2d^0\psi_3$ et, donc, $\psi_1 = c \in R$. Par une procédure de descente analogue à celle de la démonstration du théorème II.4, par composition par divers $\Phi_\tau$ on peut faire décroître $\deg \psi$ tant que l'une de ses composantes n'est pas constante.

THÉORÈME 5. *Pour* $\sigma \in \operatorname{Hom}(F, F)$, $Q_\sigma \equiv 0$ *si et seulement si* $\sigma$ *n'est pas injectif.*

*Démonstration.* Supposons $\sigma$ non injectif. En vertu de la proposition 3, il existe $\mu \in \operatorname{Aut} F$ tel que $\sigma\mu(b) = e$. Or, on sait que $Q_{\sigma\mu} = Q_\mu Q_\sigma \circ \Phi_\mu$. Or, il est facile de vérifier que $Q_{\sigma\mu} = 0$. Comme $Q_\mu \equiv 1$, cela implique $Q_\sigma \equiv 0$.

Supposons maintenant que l'on ait $Q_\sigma \equiv 0$. En vertu du lemme précédent, il existe $\tau \in \operatorname{Aut} F$ tel que la première composante de $\Phi_{\tau\sigma}$ soit constante. Le lemme II.2 montre alors que $\tau\sigma(a) = e$, ce qui prouve que $\sigma$ n'est pas injective.

## V. AUTRES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES $Q_\sigma$

THÉORÈME 1. *Pour tout* $\sigma \in \operatorname{End} F$, *on a les faits suivants:*

1°) $Q_\sigma(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\det \sigma)^2$ *pour tous* $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$.

2°) $\lambda$ *divise le polynôme* $\det \Phi'_\sigma - (\det \sigma) Q_\sigma$.

*Démonstration.* Observons d'abord que si $p$ et $q$ sont deux entiers rationnels on a

$$P_{a^p b^q}(x, y, z) = zu_p(x)u_q(y) - xu_p(x)u_{q-1}(y) - yu_{p-1}(x)u_q(y) + 2u_{p-1}(x)u_{q-1}(y) .$$

Si $\varepsilon$ et $\eta$ valent $\pm 1$, il est facile de vérifier que

$$P_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = 2\varepsilon^p \eta^q$$

et de calculer le gradient de $P_{a^p b^q}$:

$$P'_{a^p b^q}(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta) = (\varepsilon p(p-q), \eta q(q-p), \varepsilon\eta pq)\varepsilon^p \eta^q .$$

Considérons maintenant un élément de $\sigma$ de $\operatorname{End} F$ dont la matrice est $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Ce qui précède montre que le point $(2, 2, 2)$ est point fixe pour $\Phi_\sigma$ et que l'ensemble $\{(2\varepsilon, 2\eta, 2\varepsilon\eta); \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}\}$ est globalement invariant par $\Phi_\sigma$.