III. Applications polynomiales laissant invariant Caractérisation des tels que $Q_\sigma = 1$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On sait par ailleurs (proposition I.9) que λ divise $P_{\sigma(ab)} - P_{a^\varepsilon b^\eta}$. Comme $P_{\sigma(ab)} = z$ et $P_{a^{-1}b} = P_{ab^{-1}} = xy - z$ on a $\varepsilon = \eta$. Quitte à composer avec l'involution (a^{-1}, b^{-1}), on peut supposer que l'on a $\varepsilon = \eta = 1$.

Supposons que les mots uau^{-1} et vbv^{-1} soient réduits. Si $u = v = e$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons que $|u| \geqslant |v|$ (où $|u|$ désigne la longueur de u). On a alors $u = u'b^n$ avec $n \neq 0$, la dernière lettre de u' étant a, si $|u'| > 0$. Dans ces conditions on a

$$\sigma(ab) = u'b^n ab^{-n} u'^{-1} vbv^{-1}$$

d'où

$$z = P_{(ab^{-n}u'^{-1}vbv^{-1}u'b^n)} .$$

Utilisant une nouvelle fois le lemme 3, on obtient que $u'^{-1}v = b^k$. L'irréductibilité de vbv^{-1} implique alors $u' = v$. Ceci montre que σ est un automorphisme intérieur.

III. Applications polynomiales laissant λ invariant

Caractérisation des σ tels que $Q_\sigma = 1$

On désigne par R un domaine d'intégrité de caractéristique nulle et par $\mathscr{A}$ l'ensemble des $\psi \in (R[x, y, z])^3$ tels que $\lambda \circ \psi = \lambda$.

L'ensemble $\mathscr{A}$ contient $\{\Phi_\sigma ; \sigma \in \operatorname{aut} F\}$. Il sera commode de considérer les éléments suivants de $\operatorname{aut} F$:

$$\alpha = (b, a) , \quad \beta = (a, b^{-1}) , \quad \gamma = (ab, b^{-1}) .$$

Les Φ correspondants sont

$$\Phi_\alpha(x, y, z) = (y, x, z)$$
$$\Phi_\beta(x, y, z) = (x, y, xy - z)$$
$$\Phi_\gamma(x, y, z) = (z, y, x) .$$

On considérera aussi les applications polynomiales suivantes:

$$\rho(x, y, z) = (-x, -y, z)$$

et

$$\theta(x, y, z) = (-x, y, -z) .$$

Ces applications polynomiales sont également dans $\mathscr{A}$.

Nous allons montrer que $\mathscr{A}$ est engendré par $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma, \rho$ et θ.

LEMME 1. *Si* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ *appartient à* $\mathscr{A}$, *alors on a, pour* $i = 1, 2, 3$, $d^0\psi_i \geqslant 1$.

Démonstration. Si, par exemple, ψ_3 était constant, égal à c, on aurait

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 - c\psi_1\psi_2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - c^2 .$$

Or, le premier membre de cette expression est réductible dans un corps, extension convenable de R, alors que le second membre ne l'est pas.

Notons $\deg \psi$ la somme $d^0\psi_1 + d^0\psi_2 + d^0\psi_3$ et posons

$$\mathscr{L} = \{\psi \in \mathscr{A};\ \deg \psi = 3\} .$$

LEMME 2. $\mathscr{L}$ *est le groupe engendré par* Φ_α, Φ_γ *et* ρ.

Démonstration. Appelons les variables x_1, x_2, x_3 au lieu de x, y, z. Soit $\psi \in L$. On a $\psi_j(x) = l_j + u_j$ où l_j est un polynôme homogène de degré 1 et $u_j \in R$. On a

$$\sum_{j=1}^{3} (l_j + u_j)^2 - (l_1 + u_1)(l_2 + u_2)(l_3 + u_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2x_3 .$$

L'identification des termes de degré 3 donne $l_j = v_j x_{\tau(j)}$ où $v_j \in R$, et $\tau \in \mathscr{S}_3$ et $v_1v_2v_3 = 1$. L'identification des termes quadratiques donne alors $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $v_1^2 = v_2^2 = v_3^2 = 1$.

Il est dès lors facile de se convaincre que ψ est dans le groupe engendré par Φ_α, Φ_δ et ρ.

LEMME 3. *Soit* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathscr{A}$ *tel que* $\deg \psi > 3$. *Alors, il existe* $\sigma \in <\alpha, \beta, \gamma>$, *le groupe engendré par* α, β *et* γ, *tel que* $\deg(\Phi_\sigma \circ \psi) < \deg \psi$.

Démonstration. Puisque Φ_α et Φ_γ sont des transpositions distinctes de deux composantes, quitte à remplacer ψ par $\Phi_\sigma \circ \psi$, avec $\sigma \in <\alpha, \gamma>$, on peut supposer que $d^0\psi_3 \geqslant d^0\psi_2 \geqslant d^0\psi_1 \geqslant 1$.

Puisque $\deg \psi > 3$, on a $d^0\psi_3 \geqslant 2$. Or $(\psi_3 - \psi_1\psi_2)\psi_3 + \psi_2^2 + \psi_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$. Si l'on avait $d^0\psi_3 \neq d^0\psi_1\psi_2$ on aurait

$$3 = \sup(d^0\psi_3, d^0\psi_1\psi_2) + d^0\psi_3 \geqslant 4 .$$

On a donc $d^0\psi_3 = d^0\psi_1\psi_2$, d'où $d^0\psi_3 > d^0\psi_2$. Si l'on avait $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) = d^0\psi_3$, on aurait $2d^0\psi_3 = 3$, donc on a $d^0(\psi_3 - \psi_1\psi_2) < d^0\psi_3$. Ceci montre que $\deg \Phi_\beta \circ \psi < \deg \psi$. Ceci achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 4. *$\mathscr{A}$ est le groupe engendré par $\Phi_\alpha, \Phi_\beta, \Phi_\gamma$ et ρ.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer de façon répétitive le lemme précédent pour se ramener au lemme 2.

THÉORÈME 5. *L'ensemble des $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$ tels que $Q_\sigma = 1$ est l'ensemble des automorphismes de F.*

Démonstration. Dire que $Q_\sigma = 1$ équivaut à dire $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Si $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$, le lemme 3 permet de montrer l'existence d'un $\tau \in <\alpha, \beta, \gamma>$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma \in \{\theta, \rho\}$. Mais, en vertu des lemmes II.3 et II.4, on a alors $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Il en résulte (théorème II.5) que $\tau \circ \sigma$ est un automorphisme, donc aussi σ.

LEMME 6. *Si i_w désigne l'automorphisme intérieur $u \to wuw^{-1}$ de F. On a*

$$i_a = \beta\alpha\beta\gamma\beta\gamma\alpha\beta \quad \text{et} \quad i_b = \alpha i_a \alpha .$$

Démonstration. Elle se fait par vérification directe.

THÉORÈME 7. *L'ensemble des automorphismes de F est le groupe engendré par α, β et γ.*

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$. Alors $\Phi_\sigma \in \mathscr{A}$. Comme précédemment, il existe $\tau \in <\alpha, \beta, \gamma>$ tel que $\Phi_\tau \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$. Le théorème II.1 montre alors $\tau \circ \sigma$ est soit un automorphisme intérieur, soit un automorphisme intérieur composé avec (a^{-1}, b^{-1}), qui n'est autre que $(\alpha\beta)^2$. Le théorème résulte alors du lemme précédent.

Remarque. Ce théorème est un résultat ancien de Nielsen [5], [6], mais la démonstration que nous en donnons ne fait pas appel à la délicate théorie de la réduction de Nielsen.

IV. ETUDE DES RELATIONS $\Phi_\sigma = \Phi_\tau$ ET $Q_\sigma = 0$.

Notons F^* l'ensemble des éléments w de F qui sont image d'un générateur par un automorphisme de F.

THÉORÈME 1. *Soit σ et τ deux endomorphismes de F tels que $\sigma(a), \sigma(b)$ et $\sigma(ab)$ soient dans F^*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*