I. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Cet article répond à certaines questions posées dans [8]. Pour la commodité du lecteur, dans la première partie, les résultats de [8] sont repris, et dans certains cas précisés.

I. INTRODUCTION

On désigne dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5 par F le groupe libre à deux générateurs, a et b. On note $\operatorname{tr} A$ la trace de la matrice carrée A. Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbf{C})$, on note $T\varphi$ le triplet $(\operatorname{tr}\varphi(a), \operatorname{tr}\varphi(b), \operatorname{tr}\varphi(ab))$.

L'image de T est $\mathbf{C}^3$ tout entier: pour s'en persuader, il suffit de considérer les φ tels que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & y \end{pmatrix}$.

Si σ et σ' sont des endomorphismes de F, on pose $\sigma\sigma' = \sigma' \circ \sigma$. On identifiera un élément σ de $\operatorname{Hom}(F, F)$ au couple $(\sigma(a), \sigma(b)) \in F \times F$.

Si w est un élément de F, on désignera par $\tilde{w}$ l'élément de $\mathbf{Z}^2$, image de w par l'homomorphisme d'abélianisation. Si σ est un endomorphisme de F, il définit, par abélianisation, un endomorphisme de $\mathbf{Z}^2$ dont nous désignerons par $\tilde{\sigma}$ la matrice transposée. En d'autres termes, $\tilde{\sigma}$ est la matrice carrée indexée par $\{a, b\} \times \{a, b\}$ dont les coefficients d'interprètent de la façon suivante: si u et v appartiennent à $\{a, b\}$, $\tilde{\sigma}_{u,v}$ = somme des puissances de la lettre v dans $\sigma(u)$. On a évidemment $(\sigma\sigma')^{\sim} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$.

On note λ le polynôme $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$. On sait que, pour $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, $\lambda(T\varphi)$ est nul si et seulement si $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune.

LEMME 1. *Soit A et B deux éléments de $SL(2, \mathbf{C})$. On a*

$$AB + BA = \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + A \operatorname{tr} B + B \operatorname{tr} A .$$

Démonstration. Le théorème de Cayley-Hamilton donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \operatorname{tr} A - A \\ B^{-1} &= \operatorname{tr} B - B \\ (AB)^2 &= AB \operatorname{tr}(AB) - 1 . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} BA &= A^{-1}ABABB^{-1} \\ &= A^{-1}(AB \operatorname{tr}(AB) - 1)B^{-1} \\ &= \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A - A)(\operatorname{tr} B - B) \\ &= \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + A \operatorname{tr} B + B \operatorname{tr} A - AB . \end{aligned}$$

LEMME 2. *Soit* $w \in F$. *Il existe alors quatre polynômes,*

$$P_w^{(j)} \in \mathbf{Z}[x, y, z] \ (j = 1, 2, 3, 4) ,$$

tels que, pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, *on ait*

$$\varphi(w) = P_w^{(1)}(T\varphi) + P_w^{(2)}(T\varphi)\varphi(a) + P_w^{(3)}(T\varphi)\varphi(b) + P_w^{(4)}(T\varphi)\varphi(ab) .$$

Démonstration. Posons, pour simplifier, $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$ et $T\varphi = (x, y, z)$. On a alors, en vertu du théorème de Cayley-Hamilton et du lemme précédent,

$$\begin{aligned} A^2 &= xA - 1 \\ A^{-1} &= x - A \\ B^2 &= yB - 1 \\ B^{-1} &= y - B \\ BA &= z - xy + yA + xB - AB . \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} ABA &= \mathrm{A}(z - xy + yA + xB - AB) \\ &= A[z - yA^{-1} + xA^{-1}B] \\ &= -y + zA + xB . \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors de ces formules par récurrence sur la longueur de w, supposé réduit.

PROPOSITION 3. *Soit* $w \in F$. *Il existe alors un unique polynôme* $P_w \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ *tel que, pour tout* $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, *on ait*

$$\mathrm{tr}\,\varphi(w) = P_w(T\varphi) .$$

Démonstration. L'existence résulte du lemme précédent:

$$\mathrm{tr}\,\varphi(w) = 2P_w^{(1)}(T\varphi) + P_w^{(2)}(T\varphi)\,\mathrm{tr}\,\varphi(a) + P_w^{(3)}(T\varphi)\,\mathrm{tr}\,\varphi(b) + P_w^{(4)}(T\varphi)\,\mathrm{tr}\,\varphi(ab) .$$

L'unicité résulte de la surjectivité de T.

Cette proposition, avec une démonstration légèrement différente, figure dans [1].

THÉORÈME 4. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$. *Il existe alors un unique* $\Phi_\sigma \in (\mathbf{Z}[x, y, z])^3$ *tel que, pour tout* $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$ *on ait*

$$T(\varphi \circ \sigma) = \Phi_\sigma(T\varphi) .$$

Démonstration. Cela résulte simplement de la proposition précédente, appliquée aux éléments $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ et $\varphi(ab)$ de F.

PROPOSITION 5. *Quels que soient* σ_1 *et* σ_2 *dans* $\mathrm{Hom}(F, F)$, *on a*

$$\Phi_{\sigma_1\sigma_2} = \Phi_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2} .$$

Démonstration. On a

$$T(\varphi \circ \sigma_2 \circ \sigma_1) = \Phi_{\sigma_1}(T(\varphi \circ \sigma_2)) = \Phi_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2}(T\varphi) ,$$

d'où le résultat à cause de l'unicité de $\Phi_{\sigma_1\sigma_2}$.

PROPOSITION 6. *Quels que soient* $w \in F$ *et* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$, *on a*

$$P_{\sigma(w)} = P_w \circ \Phi_\sigma .$$

Démonstration. Soit σ' l'élément de $\mathrm{Hom}(F, F)$ ainsi défini: $\sigma'(a) = w$, $\sigma'(b) = b$. Alors P_w et $P_{\sigma(w)}$ sont les premières composantes de $\Phi_{\sigma'}$ et de $\Phi_{\sigma'\sigma}$ respectivement. Or $\Phi_{\sigma'\sigma} = \Phi_{\sigma'} \circ \Phi_\sigma$, d'où le résultat.

THÉORÈME 7. *Soit* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$. *Il existe alors un polynôme* $Q_\sigma \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ *tel que l'on ait* $\lambda \circ \Phi_\sigma = \lambda \cdot Q_\sigma$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$ tel que $\lambda(T\varphi) = 0$. Alors $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune. Il en est donc de même de $\varphi(\sigma(a))$ et de $\varphi(\sigma(b))$. Par suite $\lambda(\varphi_\sigma(T\varphi)) = 0$.

L'existence de Q_σ avait été conjecturée dans [3] et prouvée dans [8].

PROPOSITION 8. *Si* σ_1 *et* σ_2 *sont deux éléments de* $\mathrm{Hom}(F, F)$ *on a*

$$Q_{\sigma_1\sigma_2} = Q_{\sigma_2} \cdot Q_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2} .$$

Démonstration. On a

$$\lambda \circ \Phi_{\sigma_1\sigma_2} = (\lambda \circ \Phi_{\sigma_1}) \circ \Phi_{\sigma_2} = (\lambda \cdot Q_{\sigma_1}) \circ \Phi_{\sigma_2} = \lambda \cdot Q_{\sigma_2} \cdot Q_{\sigma_1} \circ \Phi_{\sigma_2} .$$

PROPOSITION 9. *Si* w *et* w' *sont deux éléments de* F *tels que* $\tilde{w} = \tilde{w}'$, *alors* $P_w - P_{w'}$ *est divisible par* λ.

Démonstration. Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbf{C})$ tel que $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune, on a $P_w(T\varphi) = P_{w'}(T\varphi)$, comme on peut le voir en trigonalisant simultanément $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Par suite le polynôme $P_w - P_{w'}$ s'annule sur les zéros de λ.

Soit Ω la variété des zéros de λ. Le théorème 7 dit que Ω est stable par tout Φ_σ. La proposition 9 dit que la restriction de Φ_σ à Ω ne dépend que de l'abélianisé $\tilde{\sigma}$ de σ.

PROPOSITION 10. *Si* $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$, *alors* $\det \Phi'_\sigma = \pm 1$.

Démonstration. Différentions la relation $\Phi_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma = \mathrm{id}$ et prenons les déterminants. On obtient

$$\det(\Phi'_{\sigma^{-1}} \circ \Phi_\sigma) \det(\Phi'_\sigma) = 1 .$$

Comme ces déterminants sont des polynômes à coefficients entiers, ils sont nécessairement constants, égaux à ± 1.

LEMME 11. *Pour tout* $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, F)$, *on a* $Q_\sigma(0, 0, 0) = 0$ *ou* 1.

Démonstration. Il suffit de considérer $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$ tel que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Nous donnerons plus loin un résultat plus précis que celui-ci.

PROPOSITION 12. *Si* $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$, *on a* $Q_\sigma = 1$.

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 8 et du lemme 11.

II. DÉTERMINATION DU NOYAU DE Φ

Comme l'ont observé Kolar et Ali [3], les polynômes de Chebyschev interviennent naturellement dans ce contexte.

Considérons les deux suites de polynômes $\{t_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ et $\{u_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ satisfaisant la même relation de récurrence

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = x t_n(x)$$
$$u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) = x u_n(x)$$

avec les conditions initiales

$$t_0(x) = 2 , \quad t_1(x) = x , \quad u_0(x) = 0 , \quad u_1(x) = 1 .$$

Il est facile de vérifier les faits suivants:

$$t_{-n} = t_n , \quad d^0 t_n = |n|$$
$$u_{-n} = -u_n , \quad d^0 u_n = n - 1 \quad \text{si} \quad n \geqslant 1$$
$$t_n(2 \cos \varphi) = 2 \cos n\varphi$$
$$u_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$
$$t_n(x) = x u_n(x) - 2u_{n-1}(x) .$$