L'Enseignement Mathématique, t. 39 (1993), p. 153-175

POLYNÔMES ASSOCIÉS AUX ENDOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES

par Jacques PEYRIÈRE, WEN ZHI-YING et WEN ZHI-XIONG

ABSTRACT. If σ is an endomorphism of F, the free group generated by a and b, there exists a unique polynomial map Φ_σ from $\mathbf{C}^3$ to $\mathbf{C}^3$, with integral coefficients, such that, for any representation φ of F in $SL(2, \mathbf{C})$, one has

$$(\operatorname{tr}\varphi(\sigma(a)), \operatorname{tr}\varphi(\sigma(b)), \operatorname{tr}\varphi(\sigma(ab))) = \Phi_\sigma(\operatorname{tr}\varphi(a), \operatorname{tr}\varphi(b), \operatorname{tr}\varphi(ab)) .$$

The following relation holds: $\Phi_{\sigma' \circ \sigma} = \Phi_\sigma \circ \Phi_{\sigma'}$. The kernel of Φ is shown to be generated by the inner automorphisms of F and the involution which takes a to a^{-1} and b to b^{-1}. If λ denotes the polynomial $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$, then $\lambda \circ \Phi_\sigma$ factorizes under the form $\lambda \cdot Q_\sigma$, where Q_σ is a polynomial with integral coefficients. Among other properties of Q_σ, it is proved that σ is an automorphism of E if and only if Q_σ equals 1 identically. The case of a free group with more than two generators is also studied but, in this case, results are less complete.

RÉSUMÉ. A chaque endomorphisme σ du groupe libre F engendré par a et b on associe une unique application polynomiale Φ_σ, à coefficients entiers, de $\mathbf{C}^3$ dans $\mathbf{C}^3$ telle que, pour toute représentation φ de F dans $SL(2, \mathbf{C})$ on ait

$$(\operatorname{tr}\varphi(\sigma(a)), \operatorname{tr}\varphi(\sigma(b)), \operatorname{tr}\varphi(\sigma(ab))) = \Phi_\sigma(\operatorname{tr}\varphi(a), \operatorname{tr}\varphi(b), \operatorname{tr}\varphi(ab)) .$$

L'application Φ est un anti-homomorphisme du monoïde des endomorphismes de F dans le monoïde des applications polynomiales de $\mathbf{C}^3$ dans $\mathbf{C}^3$, muni de la composition. Diverses propriétés de Φ sont établies. En particulier, son noyau est caractérisé. En outre, si λ désigne le polynôme $x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$, le polynôme $\lambda \circ \Phi$ se factorise sous la forme $\lambda \cdot Q_\sigma$ où Q_σ est un polynôme à coefficients entiers. Il est établi, entre autre, que σ est un automorphisme de F si et seulement si Q_σ est identiquement égal à 1. Le cas d'un groupe libre à plus de deux générateurs est également abordé, mais avec des résultats moins complets.

AMS Classification: 20E05 - 20M05 - 16R99 - 15A24.

KEYWORDS: Freegroups - finite automata - traces - PI rings - polynomial identities.

Cet article répond à certaines questions posées dans [8]. Pour la commodité du lecteur, dans la première partie, les résultats de [8] sont repris, et dans certains cas précisés.

I. Introduction

On désigne dans les sections 1, 2, 3, 4 et 5 par F le groupe libre à deux générateurs, a et b. On note $\operatorname{tr} A$ la trace de la matrice carrée A. Si φ est un homomorphisme de F dans $SL(2, \mathbf{C})$, on note $T\varphi$ le triplet $(\operatorname{tr} \varphi(a), \operatorname{tr} \varphi(b), \operatorname{tr} \varphi(ab))$.

L'image de T est $\mathbf{C}^3$ tout entier: pour s'en persuader, il suffit de considérer les φ tels que $\varphi(a) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda^{-1} & y \end{pmatrix}$.

Si σ et σ' sont des endomorphismes de F, on pose $\sigma\sigma' = \sigma' \circ \sigma$. On identifiera un élément σ de $\operatorname{Hom}(F, F)$ au couple $(\sigma(a), \sigma(b)) \in F \times F$.

Si w est un élément de F, on désignera par $\tilde{w}$ l'élément de $\mathbf{Z}^2$, image de w par l'homomorphisme d'abélianisation. Si σ est un endomorphisme de F, il définit, par abélianisation, un endomorphisme de $\mathbf{Z}^2$ dont nous désignerons par $\tilde{\sigma}$ la matrice transposée. En d'autres termes, $\tilde{\sigma}$ est la matrice carrée indexée par $\{a, b\} \times \{a, b\}$ dont les coefficients d'interprètent de la façon suivante: si u et v appartiennent à $\{a, b\}$, $\tilde{\sigma}_{u,v}$ = somme des puissances de la lettre v dans $\sigma(u)$. On a évidemment $(\sigma\sigma')^{\sim} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$.

On note λ le polynôme $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 4$. On sait que, pour $\varphi \in \operatorname{Hom}(F, SL(2, \mathbf{C}))$, $\lambda(T\varphi)$ est nul si et seulement si $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ont une direction propre commune.

LEMME 1. *Soit A et B deux éléments de $SL(2, \mathbf{C})$. On a*

$$AB + BA = \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + A \operatorname{tr} B + B \operatorname{tr} A .$$

Démonstration. Le théorème de Cayley-Hamilton donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \operatorname{tr} A - A \\ B^{-1} &= \operatorname{tr} B - B \\ (AB)^2 &= AB \operatorname{tr}(AB) - 1 . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} BA &= A^{-1}ABABB^{-1} \\ &= A^{-1}(AB \operatorname{tr}(AB) - 1)B^{-1} \\ &= \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A - A)(\operatorname{tr} B - B) \\ &= \operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B) + A \operatorname{tr} B + B \operatorname{tr} A - AB . \end{aligned}$$