

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

## MAXIMALLY COMPLETE FIELDS

by Bjorn POONEN

ABSTRACT. Kaplansky proved in 1942 that among all fields with a valuation having a given divisible value group  $G$ , a given algebraically closed residue field  $R$ , and a given restriction to the minimal subfield (either the trivial valuation on  $\mathbf{Q}$  or  $\mathbf{F}_p$ , or the  $p$ -adic valuation on  $\mathbf{Q}$ ), there is one that is maximal in the strong sense that every other can be embedded in it. In this paper, we construct this field explicitly and use the explicit form to give a new proof of Kaplansky's result. The field turns out to be a Mal'cev-Neumann ring or a  $p$ -adic version of a Mal'cev-Neumann ring in which the elements are formal series of the form  $\sum_{g \in S} \alpha_g p^g$  where  $S$  is a well-ordered subset of  $G$  and the  $\alpha_g$ 's are residue class representatives. We conclude with some remarks on the  $p$ -adic Mal'cev-Neumann field containing  $\bar{\mathbf{Q}}_p$ .

### I. INTRODUCTION

It is well known that if  $k$  is an algebraically closed field of characteristic zero, then the algebraic closure of the field of Laurent series  $k((t))$  is obtained by adjoining  $t^{1/n}$  for each integer  $n \geq 1$ , and that the expansion of a solution to a polynomial equation over  $k((t))$  can be obtained by the method of successive approximation. (For example, to find a square root of  $1 + t$ , one solves for the coefficients of  $1, t, t^2, \dots$  in turn.) But if  $k$  is algebraically closed of characteristic  $p$ ,  $\cup_{n=1}^{\infty} k((t^{1/n}))$  is no longer an algebraic closure of  $k((t))$ . In particular, the Artin-Schreier equation  $x^p - x = t^{-1}$  has no solution in  $\cup_{n=1}^{\infty} k((t^{1/n}))$ . (See p. 64 of Chevalley [3].) If one attempts nevertheless to successively approximate a solution, one obtains the expansion (due to Abhyankar [1])

$$x = t^{-1/p} + t^{-1/p^2} + t^{-1/p^3} + \dots,$$

in which the exponents do not tend to  $\infty$ , as they should if the series were to converge with respect to a valuation in the usual sense. However, one checks