

# §5

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

le revêtement de  $\mathbf{SL}_2(K)$  défini par C. Moore et T. Kubota; on a une suite exacte

$$\{1\} \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow \mathbf{SL}_2(K) \rightarrow \{1\}$$

et  $S$  est son propre groupe dérivé. Montrer que toute représentation  $K$ -linéaire analytique du groupe de Lie  $S$  est triviale sur  $\mu$ ; en déduire que  $\mathbf{SL}_2$  est l'enveloppe de  $S$ . (Si  $G$  est l'enveloppe de  $S$ , remarquer que la suite

$$\mu \rightarrow G \rightarrow \mathbf{SL}_2 \rightarrow \{1\}$$

est exacte (cf. exercice 5). Utiliser ensuite le fait que  $\mathbf{SL}_2$  est simplement connexe.)

### § 5

1) Etendre la prop. 1 au cas d'un groupe compact  $K$  opérant continûment sur un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie, chacune des opérations de  $K$  étant *polynomiale*. (On montrera d'abord, au moyen du théorème de Baire, que le degré de ces opérations est borné.)

2) Soit  $H$  un sous-groupe algébrique réel de  $\mathbf{GL}_n$ . Montrer que  $H$  est anisotrope si et seulement si il existe une forme quadratique positive non dégénérée sur  $\mathbf{R}^n$  qui est invariante par  $H$ .

3) a) Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire réel, et soit  $H$  un sous-groupe algébrique distingué de  $G$ . On suppose que  $H$  et  $G/H$  sont anisotropes, et que  $G/H$  est connexe. Montrer que  $G$  est anisotrope.

b) On prend pour  $G$  le groupe des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  avec  $(a^2 + b^2)^2 = 1$  et pour  $H$  le sous-groupe de celles pour lesquelles  $a^2 + b^2 = 1$ . Le groupe  $G/H$  s'identifie au groupe «constant»  $\{\pm 1\}$ . Montrer que  $H$  et  $G/H$  sont anisotropes et que  $G$  ne l'est pas.

4) Avec les notations de la prop. 7, montrer que l'injection de  $V(\mathbf{R})$  dans  $V(\mathbf{C})$  est une «équivalence d'homotopie». (Il suffit de voir que  $\pi_i(V(\mathbf{R})) \rightarrow \pi_i(V(\mathbf{C}))$  est un isomorphisme pour tout  $i$ ; utiliser le lemme des cinq pour se ramener à l'énoncé analogue pour  $G$  et  $H$ .) [Exercice: donner explicitement une «rétraction de déformation» de  $V(\mathbf{C})$  sur  $V(\mathbf{R})$ .]

En particulier, la quadrique complexe d'équation  $\sum z_i^2 = 1$  a même type d'homotopie que l'ensemble de ses points réels; énoncer des résultats analogues pour les variétés de Stiefel, etc.

5) (Cet exercice pourrait remonter au chapitre III du livre de Lie.)

Soit  $A$  un groupe de Lie complexe, commutatif, connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$ ; soit  $\Lambda$  le noyau de  $\exp: \mathfrak{a} \rightarrow A$ , de sorte que  $A$  s'identifie à  $\mathfrak{a}/\Lambda$ .

a) Démontrer l'équivalence de:

- a<sub>1</sub>) L'application canonique  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est injective.
- a<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un sous-groupe de Lie d'un  $(\mathbf{C}^*)^n$ .
- a<sub>3</sub>)  $A$  est isomorphe à un groupe  $(\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{C}^q$ .
- a<sub>4</sub>)  $A$  possède une représentation linéaire complexe fidèle.
- a<sub>5</sub>)  $A$  possède une représentation linéaire complexe fidèle semi-simple d'image fermée.

b) Démontrer l'équivalence de:

- b<sub>1</sub>) L'application  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est surjective.
- b<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un quotient d'un groupe  $(\mathbf{C}^*)^n$ .
- b<sub>3</sub>) Aucun facteur direct de  $A$  n'est isomorphe à  $\mathbf{C}$ .
- b<sub>4</sub>) Toute représentation linéaire complexe de  $A$  est semi-simple.

c) Démontrer l'équivalence de:

- c<sub>1</sub>) L'application  $\mathbf{C} \otimes \Lambda \rightarrow \mathfrak{a}$  est bijective.
- c<sub>2</sub>)  $A$  est isomorphe à un  $(\mathbf{C}^*)^n$ .

d) Soit  $F$  un sous-groupe fini de  $A$ , et soit  $A' = A/F$ . Montrer que  $A$  vérifie les conditions  $a_i$ ) (resp.  $b_i$ ),  $c_i$ )) si et seulement si  $A'$  les vérifie.