§5

le revêtement de $\mathbf{SL}_2(K)$ défini par C. Moore et T. Kubota; on a une suite exacte

$$\{1\} \to \mu \to S \to \mathbf{SL}_2(K) \to \{1\}$$

et S est son propre groupe dérivé. Montrer que toute représentation K-linéaire analytique du groupe de Lie S est triviale sur μ; en déduire que $\mathbf{SL}_2$ est l'enveloppe de S. (Si G est l'enveloppe de S, remarquer que la suite

$$\mu \to G \to \mathbf{SL}_2 \to \{1\}$$

est exacte (cf. exercice 5). Utiliser ensuite le fait que $\mathbf{SL}_2$ est simplement connexe.)

§5

1) Etendre la prop. 1 au cas d'un groupe compact K opérant continûment sur un espace vectoriel réel V de dimension finie, chacune des opérations de K étant *polynomiale.* (On montrera d'abord, au moyen du théorème de Baire, que le degré de ces opérations est borné.)

2) Soit H un sous-groupe algébrique réel de $\mathbf{GL}_n$. Montrer que H est anisotrope si et seulement si il existe une forme quadratique positive non dégénérée sur $\mathbf{R}^n$ qui est invariante par H.

3) a) Soit G un groupe algébrique linéaire réel, et soit H un sous-groupe algébrique distingué de G. On suppose que H et G/H sont anisotropes, et que G/H est connexe. Montrer que G est anisotrope.

b) On prend pour G le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a^2+b^2)^2 = 1$ et pour H le sous-groupe de celles pour lesquelles $a^2+b^2=1$. Le groupe G/H s'identifie au groupe «constant» $\{\pm 1\}$. Montrer que H et G/H sont anisotropes et que G ne l'est pas.

4) Avec les notations de la prop. 7, montrer que l'injection de $V(\mathbf{R})$ dans $V(\mathbf{C})$ est une «équivalence d'homotopie». (Il suffit de voir que $\pi_i(V(\mathbf{R})) \to \pi_i(V(\mathbf{C}))$ est un isomorphisme pour tout i; utiliser le lemme des cinq pour se ramener à l'énoncé analogue pour G et H.) [Exercice: donner explicitement une «rétraction de déformation» de $V(\mathbf{C})$ sur $V(\mathbf{R})$.]

En particulier, la quadrique complexe d'équation $\sum z_i^2 = 1$ a même type d'homotopie que l'ensemble de ses points réels; énoncer des résultats analogues pour les variétés de Stiefel, etc.

5) (Cet exercice pourrait remonter au chapitre III du livre de Lie.)

Soit A un groupe de Lie complexe, commutatif, connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$; soit Λ le noyau de $\exp : \mathfrak{a} \to A$, de sorte que A s'identifie à $\mathfrak{a}/\Lambda$.

a) Démontrer l'équivalence de:

a_1) L'application canonique $\mathbf{C} \otimes \Lambda \to \mathfrak{a}$ est injective.

a_2) A est isomorphe à un sous-groupe de Lie d'un $(\mathbf{C}^*)^n$.

a_3) A est isomorphe à un groupe $(\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{C}^q$.

a_4) A possède une représentation linéaire complexe fidèle.

a_5) A possède une représentation linéaire complexe fidèle semi-simple d'image fermée.

b) Démontrer l'équivalence de:

b_1) L'application $\mathbf{C} \otimes \Lambda \to \mathfrak{a}$ est surjective.

b_2) A est isomorphe à un quotient d'un groupe $(\mathbf{C}^*)^n$.

b_3) Aucun facteur direct de A n'est isomorphe à $\mathbf{C}$.

b_4) Toute représentation linéaire complexe de A est semi-simple.

c) Démontrer l'équivalence de:

c_1) L'application $\mathbf{C} \otimes \Lambda \to \mathfrak{a}$ est bijective.

c_2) A est isomorphe à un $(\mathbf{C}^*)^n$.

d) Soit F un sous-groupe fini de A, et soit $A' = A/F$. Montrer que A vérifie les conditions a_i) (resp. b_i), c_i)) si et seulement si A' les vérifie.