

§4

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Utiliser le même procédé pour obtenir la décomposition des éléments de l'algèbre de Lie de G en sommes d'éléments semi-simples et nilpotents commutant entre eux.

[Cette décomposition n'a en fait rien à voir avec les bigèbres. On aurait pu la donner au §2.]

3) On suppose que $G = \text{Spec}(C)$ est un schéma en groupes. Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

- a) Tout G -module simple est isomorphe au G -module trivial K .
- b) G est limite projective de groupes algébriques linéaires unipotents.
- c) Si $E \in \text{Com}_C^f$, $K_1 \in \text{Alg}_K$, et $u \in G_E(K_1)$, l'élément u est unipotent.

4) On suppose K de caractéristique zéro. Montrer que la catégorie des G -modules semi-simples vérifie les conditions du corollaire à la prop. 3, donc correspond à un quotient H de G . Montrer que l'on peut caractériser H comme le plus grand quotient de G qui soit *réductif* (i.e. limite projective de groupes algébriques linéaires réductifs, au sens usuel).

§4

1) On prend $K = \mathbf{C}$. Le groupe additif $\Gamma = \mathbf{C}$ est considéré comme un groupe de Lie complexe. Soit G son enveloppe, et soit C la bigèbre correspondante.

a) Montrer qu'une fonction $f(z)$ sur Γ appartient à C si et seulement si c'est une *exponentielle-polynôme*, i.e. si elle est combinaison linéaire de fonctions de la forme $z^n e^{\lambda z}$, avec $n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

b) Montrer que C est produit tensoriel de la bigèbre formée des polynômes, et de la bigèbre formée des combinaisons linéaires d'exponentielles. Interpréter cette décomposition comme une décomposition de l'enveloppe G en produit du groupe *additif* G_a et d'un *groupe de type multiplicatif* M dual du groupe abélien \mathbf{C} . En particulier, G n'est pas algébrique.

2) Comment faut-il modifier l'exercice précédent lorsque $K = \mathbf{R}$ et $\Gamma = \mathbf{R}$? (La partie «tore» de G n'est plus déployée; son dual est \mathbf{C} , muni de la conjugaison complexe.)

(Dans les deux exercices ci-après, on se permet d'identifier un groupe profini Γ à son enveloppe relativement à la catégorie des Γ -modules à noyau

ouvert. Cela revient à identifier un groupe fini au groupe algébrique «constant» de dimension 0 qui lui est associé.)

3) Soit $K = \mathbf{Q}_p$, et soit H un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur K . Soit Γ un sous-groupe ouvert compact du groupe $H(\mathbf{Q}_p)$. Montrer que l'enveloppe du groupe topologique Γ est $H \times \Gamma$. (Le second facteur est identifié au schéma en groupes correspondant, cf. ci-dessus.)

4) Soient $K = \mathbf{Q}$ et $\Gamma = \mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$, $n \geq 3$. On prend pour L la catégorie de toutes les représentations linéaires de Γ sur \mathbf{Q} de rang fini. Montrer que l'enveloppe de Γ est $\mathbf{SL}_n \times \prod_p \mathbf{SL}_n(\mathbf{Z}_p)$, le second facteur étant identifié à un schéma en groupes comme on l'a expliqué ci-dessus. (Utiliser le th. 16.2, p. 497, des *Publ. IHES*, 1967, combiné avec le fait que tout sous-groupe d'indice fini de Γ contient un «groupe de congruence».)

5) Soit K un corps complet pour une valuation discrète v . On note A (resp. \mathfrak{m}) l'anneau (resp. l'idéal maximal) de v , et l'on note p la caractéristique du corps A/\mathfrak{m} . On suppose $p \neq 0$ et $\text{car}(K) = 0$.

a) Soit $x \in K^*$. Supposons qu'il existe un entier d tel que, pour tout $n \geq 0$, il existe une extension K_n de K de degré d et un élément $y \in K_n$ tel que $y^{p^n} = x$. Montrer que $v(x) = 0$. Montrer que, si $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, on a $x = 1$. (Se ramener au cas où toutes les racines p^n -èmes de x appartiennent au corps K .)

b) Soit $f : K \rightarrow \mathbf{GL}_n(K)$ un homomorphisme K -analytique. Montrer que f est «algébrique», i.e. qu'il existe une matrice nilpotente u telle que $f(t) = \exp(tu)$ pour tout $t \in K$. (Appliquer a) aux valeurs propres de $f(t)$, avec $d = n$; en conclure que $f(t)$ est unipotent pour tout t .)

c) Dédire de b) que l'enveloppe du groupe de Lie K est le groupe additif \mathbf{G}_a (relativement à K).

d) Etendre b) et c) aux groupes algébriques *unipotents* sur K (écrire les éléments de ces groupes comme produits de groupes à un paramètre). Même chose pour les groupes *semi-simples déployés*. [Il est probable que le résultat reste vrai pour les groupes semi-simples n'ayant aucun facteur simple anisotrope.]

e) Montrer que les résultats de b) et c) *ne s'étendent pas* aux groupes de type multiplicatif.

6) Soit K un corps localement compact ultramétrique de caractéristique 0 et soit μ le groupe des racines de l'unité contenues dans K . Soit S

le revêtement de $\mathbf{SL}_2(K)$ défini par C. Moore et T. Kubota; on a une suite exacte

$$\{1\} \rightarrow \mu \rightarrow S \rightarrow \mathbf{SL}_2(K) \rightarrow \{1\}$$

et S est son propre groupe dérivé. Montrer que toute représentation K -linéaire analytique du groupe de Lie S est triviale sur μ ; en déduire que \mathbf{SL}_2 est l'enveloppe de S . (Si G est l'enveloppe de S , remarquer que la suite

$$\mu \rightarrow G \rightarrow \mathbf{SL}_2 \rightarrow \{1\}$$

est exacte (cf. exercice 5). Utiliser ensuite le fait que \mathbf{SL}_2 est simplement connexe.)

§ 5

1) Etendre la prop. 1 au cas d'un groupe compact K opérant continûment sur un espace vectoriel réel V de dimension finie, chacune des opérations de K étant *polynomiale*. (On montrera d'abord, au moyen du théorème de Baire, que le degré de ces opérations est borné.)

2) Soit H un sous-groupe algébrique réel de \mathbf{GL}_n . Montrer que H est anisotrope si et seulement si il existe une forme quadratique positive non dégénérée sur \mathbf{R}^n qui est invariante par H .

3) a) Soit G un groupe algébrique linéaire réel, et soit H un sous-groupe algébrique distingué de G . On suppose que H et G/H sont anisotropes, et que G/H est connexe. Montrer que G est anisotrope.

b) On prend pour G le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a^2 + b^2)^2 = 1$ et pour H le sous-groupe de celles pour lesquelles $a^2 + b^2 = 1$. Le groupe G/H s'identifie au groupe «constant» $\{\pm 1\}$. Montrer que H et G/H sont anisotropes et que G ne l'est pas.

4) Avec les notations de la prop. 7, montrer que l'injection de $V(\mathbf{R})$ dans $V(\mathbf{C})$ est une «équivalence d'homotopie». (Il suffit de voir que $\pi_i(V(\mathbf{R})) \rightarrow \pi_i(V(\mathbf{C}))$ est un isomorphisme pour tout i ; utiliser le lemme des cinq pour se ramener à l'énoncé analogue pour G et H .) [Exercice: donner explicitement une «rétraction de déformation» de $V(\mathbf{C})$ sur $V(\mathbf{R})$.]

En particulier, la quadrique complexe d'équation $\sum z_i^2 = 1$ a même type d'homotopie que l'ensemble de ses points réels; énoncer des résultats analogues pour les variétés de Stiefel, etc.