

5.4. Retour aux groupes anisotropes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Remarque. Le th. 4 équivaut à dire que l'enveloppe de K est une «forme réelle» anisotrope de H . Il y a donc correspondance bijective entre:

- sous-groupes compacts maximaux de $H(\mathbf{C})$,
- formes réelles anisotropes de H .

En particulier, ces dernières sont *conjuguées entre elles* par les éléments de $H(\mathbf{C})$ (et même par ceux de $H^0(\mathbf{C})$, H^0 désignant la composante neutre de H).

5.4. RETOUR AUX GROUPES ANISOTROPES

PROPOSITION 7. *Soit G un groupe algébrique linéaire réel anisotrope, et soit H un sous-groupe algébrique de G . Soit $V = G/H$ l'espace homogène correspondant (au sens algébrique). Alors:*

- a) H est anisotrope.
- b) L'application canonique $G(\mathbf{R}) \rightarrow V(\mathbf{R})$ est surjective (de sorte qu'on peut identifier $V(\mathbf{R})$ à $G(\mathbf{R})/H(\mathbf{R})$).
- c) Si H est distingué, le groupe quotient G/H est anisotrope.

La conjugaison de Cartan $g \mapsto \bar{g}$ du th. 2 laisse évidemment stable le sous-groupe $H(\mathbf{C})$ de $G(\mathbf{C})$. Comme $H(\mathbf{C})$ est «de type algébrique», on en conclut que $H(\mathbf{C})$ admet lui-même une décomposition de Cartan $K.P$, où $K = H(\mathbf{C}) \cap G(\mathbf{R}) = H(\mathbf{R})$. Mais alors il est clair que l'adhérence de K pour la topologie de Zariski de H est H tout entier. Cela montre que H est anisotrope, d'où a).

Soit maintenant $v \in V(\mathbf{R})$; soit $g \in G(\mathbf{C})$ un élément dont l'image dans $V(\mathbf{C}) = G(\mathbf{C})/H(\mathbf{C})$ est v . On a $g \equiv \bar{g} \pmod{H(\mathbf{C})}$. Soit $K_1.P_1$ la décomposition de Cartan de $G(\mathbf{C})$ utilisée plus haut, et écrivons g sous la forme $g = k_1 p_1$, avec $k_1 \in K_1$, $p_1 \in P_1$. L'hypothèse $g \equiv \bar{g} \pmod{H(\mathbf{C})}$ signifie qu'il existe $k \in K$ et $p \in P$ tels que $g = \bar{g} k p$, i.e. $k_1 p_1 = k_1 p_1^{-1} k p$, d'où $p_1^2 = k p$, ce qui entraîne $k = 1$, $p = p_1^2$. Comme P est stable par extraction de racines carrées, on a $p_1 \in P$. On en conclut que $g \equiv k_1 \pmod{H(\mathbf{C})}$, donc que v est l'image de l'élément $k_1 \in G(\mathbf{R})$, ce qui prouve b).

Enfin, si H est distingué, il est clair que l'image de K_1 dans $(G/H)(\mathbf{R})$ est dense pour la topologie de Zariski de G/H ; or cette image est un compact, d'où etc.

[Le rédacteur ne voit pas comment démontrer que H est anisotrope sans utiliser les décompositions de Cartan — sauf, bien sûr, dans le cas où H est connexe, qui est trivial.]