5.2. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE COMPACT

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

5.2. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE COMPACT

Soit K un groupe compact. Considérons la catégorie L des représentations linéaires continues réelles de rang fini de K. Cette catégorie est *saturée* (cf. n° 4.3). Nous noterons G le schéma en groupes correspondant (sur $\mathbf{R}$) et C sa bigèbre. On dit que G est *l'enveloppe* de K, cf. n° 4.3, exemple b). Rappelons *(loc. cit.)* qu'une fonction réelle f sur K appartient à C si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes:

a) Les translatées de f (à gauche, par exemple) engendrent un espace vectoriel réel de rang fini.

b) f est continue.

Rappelons également que l'on a défini un homomorphisme canonique

$$K \to G(\mathbf{R}) .$$

THÉORÈME 1. *L'homomorphisme* $K \to G(\mathbf{R})$ *est un isomorphisme.*

L'injectivité résulte du *théorème de Peter-Weyl,* que l'on admet.

Pour prouver la surjectivité, écrivons G comme limite projective des groupes algébriques G_E attachés aux éléments de L (cf. n° 4.3). On a évidemment

$$G(\mathbf{R}) = \varprojlim . G_E(\mathbf{R}) .$$

D'autre part, d'après la prop. 2, tous les homomorphismes

$$K \to G_E(\mathbf{R})$$

sont surjectifs. Il en est donc de même (grâce à la compacité) de $K \to \varprojlim . G_E(\mathbf{R})$, d'où le théorème.

PROPOSITION 3. *Soit* $E \in L$. *Pour que* E *soit une représentation fidèle de* K (au sens usuel, i.e. le noyau de $K \to \operatorname{Aut}(E)$ doit être réduit à $\{1\}$), *il faut et il suffit que* E *soit fidèle comme C-comodule* (cf. n° 3.5).

Si E est fidèle comme comodule, G s'identifie à G_E, donc K s'identifie à $G_E(\mathbf{R})$ et il est clair que E est fidèle comme représentation de K.

La réciproque provient de ce qui a été démontré au n° 3.5, combiné avec le lemme suivant:

LEMME 2 (Burnside). *Si* E *est fidèle, toute représentation irréductible continue de* K *est un facteur d'une représentation* $\overset{n}{\otimes} E$, *avec* $n \geqslant 0$ *convenable.*

Soit F une telle représentation, et soit χ le caractère d'une composante irréductible de $C \otimes F$. Si F n'était facteur d'aucune puissance tensorielle de E, les formules d'orthogonalité des coefficients de représentations montreraient que χ est orthogonal à tous les polynômes en les coefficients c_{ij} de la représentation E. Comme ces polynômes sont denses dans l'espace des fonctions continues sur K, on aurait $\chi = 0$, ce qui est absurde.

[Il n'est probablement pas nécessaire d'utiliser les relations d'orthogonalité. Peu importe.]

Remarque. L'analogue du lemme 2 dans le cas complexe est vrai, à condition de remplacer $\overset{n}{\otimes} E$ par $\overset{n}{\otimes} (E \oplus \check{E})$. La démonstration est essentiellement la même. [Dans le cas réel, l'existence d'une forme quadratique non dégénérée invariante montre que $\check{E}$ est isomorphe à E; c'est pour cela que l'on a pu se débarrasser de $\check{E}$.]

COROLLAIRE. *Lorsque E est fidèle, l'enveloppe de K s'identifie au groupe G_E.*

Cela ne fait que reformuler la proposition.

PROPOSITION 4. *Pour que G soit algébrique, il faut et il suffit que K soit un groupe de Lie.*

Si K est un groupe de Lie, le théorème de Peter-Weyl montre qu'il admet une représentation fidèle E; on a alors $G = G_E$ d'après le corollaire ci-dessus, et G est donc algébrique. Inversement, si G est algébrique, il est clair que $K = G(\mathbf{R})$ est un groupe de Lie.

DÉFINITION 1. *Un groupe algébrique linéaire réel H est dit anisotrope s'il vérifie les deux conditions suivantes:*

a) *$H(\mathbf{R})$ est compact.*

b) *$H(\mathbf{R})$ est dense pour la topologie de Zariski de H.*

(Comme $H(\mathbf{R})$ contient un voisinage de 1 dans H, la condition b) équivaut à la suivante:

b′) *Toute composante connexe (au sens algébrique) de H contient un point réel.*

En particulier, b) est vérifiée si H est *connexe*.)

Exemples

1) Un groupe semi-simple connexe est anisotrope si et seulement si la forme de Killing de son algèbre de Lie est négative.

2) Un groupe de type multiplicatif (non nécessairement connexe) est anisotrope si et seulement si tout homomorphisme de ce groupe dans le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ est trivial ou d'ordre 2. (La conjugaison complexe opère donc par $\chi \mapsto \chi^{-1}$ sur le groupe dual.)

PROPOSITION 5. *Soit H un groupe algébrique linéaire réel, et soit K un sous-groupe compact de $H(\mathbf{R})$ dense pour la topologie de Zariski. Alors H est anisotrope, on a $K = H(\mathbf{R})$ et H s'identifie à l'enveloppe de K.*

Le fait que H soit l'enveloppe de K résulte du corollaire à la prop. 3. On en déduit que $K = H(\mathbf{R})$, donc que H est anisotrope.

COROLLAIRE. *Soit H' un groupe algébrique linéaire réel, et soit φ un homomorphisme continu de K dans $H'(\mathbf{R})$. Il existe alors un morphisme $f: H \to H'$ et un seul qui prolonge φ.*

Cela ne fait que traduire le fait que H est l'enveloppe de K.

Remarque. Il est essentiel de supposer que H' est *linéaire* (prendre pour K un cercle, et pour H' une courbe elliptique!).

PROPOSITION 6. *Le foncteur «enveloppe» est une équivalence de la catégorie des groupes de Lie compacts sur celle des groupes algébriques linéaires réels anisotropes.*

C'est clair.

Remarques

1) Le foncteur «enveloppe» jouit des propriétés explicitées au n° 4.3. En particulier, les éléments de $G(\mathbf{R}) = K$ peuvent être interprétés comme les automorphismes du foncteur «espace vectoriel sous-jacent» commutant au produit tensoriel et triviaux pour le module trivial $\mathbf{R}$. [Ce n'est pas tout à fait le *théorème de dualité de Tannaka*, car ce dernier est relatif à des représentations complexes *unitaires*, et à des automorphismes *unitaires*. Il devrait y avoir moyen de passer de l'un à l'autre. Au concours!]

2) Si K est un groupe de Lie compact, il n'y a pas lieu de distinguer entre son enveloppe en tant que *groupe topologique*, ou en tant que *groupe de Lie réel*, puisque toute représentation linéaire continue d'un groupe de Lie réel est analytique. En particulier, les éléments de la bigèbre de K sont des *fonctions analytiques* sur K.