5.1. Algébricité des groupes compacts

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

b) Supposons que K soit un *corps topologique* (resp. *un corps valué complet non discret*) et que Γ soit muni d'une structure de *groupe topologique* (resp. de *groupe de Lie* sur K). On peut prendre pour L la catégorie des représentations *continues* (resp. *K-analytiques*) de rang fini. Une fonction $f \in C$ appartient à la bigèbre C_L correspondante si et seulement si elle est continue (resp. analytique): cela se vérifie sans difficulté. Le schéma G_L est appelé simplement *l'enveloppe* du groupe topologique Γ (resp. du groupe de Lie Γ). On peut le caractériser par la propriété universelle suivante: si H est un groupe algébrique linéaire, tout homomorphisme *continu* (resp. *analytique*) de Γ dans le groupe topologique (resp. de Lie) $H(K)$ se prolonge de façon unique en un morphisme de G_L dans H. Cela résulte simplement de la description de C_L donnée ci-dessus.

On notera que, même lorsque Γ est un groupe de Lie connexe de dimension finie, son enveloppe n'est pas en général un groupe algébrique (i.e. G_L ne possède en général pas de module *fidèle*, cf. exercice 1).

c) Soit k un corps complet pour une valuation discrète; on suppose k d'inégale caractéristique et de corps résiduel algébriquement clos. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Prenons pour K le corps $\mathbf{Q}_p$ (p étant la caractéristique résiduelle de k), et pour L la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de Γ qui ont une «décomposition de Hodge» au sens de Tate (Driebergen). La catégorie L est saturée. Le groupe G_L correspondant est fort intéressant [du moins pour le rédacteur — les auditeurs du Collège, qui l'ont subi pendant trois mois, sont peut-être d'un avis différent].

§5. Groupes compacts et groupes complexes

Dans ce paragraphe, le corps de base est **R** ou **C**.

5.1. Algébricité des groupes compacts

PROPOSITION 1. *Soit K un groupe compact, opérant linéairement et continûment sur un espace vectoriel réel V de dimension finie. Toute orbite de K dans V est fermée pour la topologie de Zariski de V* (relativement à **R**).

Soit $x \in V$, et soit y un point de V n'appartenant pas à l'orbite Kx de x. Il nous faut construire une fonction polynomiale P sur V qui soit nulle sur Kx et non nulle en y. L'existence d'une telle fonction résulte du lemme plus précis suivant:

LEMME 1. *Il existe une fonction polynomiale* P *sur* V *qui prend les valeurs* 0 *en* x *et* 1 *en* y *et qui est invariante par* K.

Puisque Kx et Ky sont fermés et disjoints, il existe une fonction continue réelle f sur V qui vaut 0 sur Kx et 1 sur Ky. Comme les fonctions polynomiales sont denses dans les fonctions continues (pour la topologie de la convergence compacte), il existe une fonction polynomiale F sur V qui est $\leqslant 1/3$ sur Kx et $\geqslant 2/3$ sur Ky. Soit dk la mesure de Haar de K, normalisée de telle sorte que sa masse totale soit 1. La fonction F' définie par

$$F'(v) = \int_K F(k.v)\,dk$$

est une fonction polynomiale invariante par K; si a (resp. b) désigne la valeur de F' sur l'orbite Kx (resp. Ky), on a $a \leqslant 1/3$ et $b \geqslant 2/3$, d'où $a \neq b$. La fonction $P = \dfrac{F' - a}{b - a}$ répond alors à la question.

COROLLAIRE. *L'image de* K *dans* $\mathrm{Aut}(V)$ *est fermée pour la topologie de Zariski de* $\mathrm{End}(V)$ [et *a fortiori* pour celle de $\mathrm{Aut}(V)$].

En effet, K opère linéairement sur $\mathrm{End}(V)$ par

$$(k, u) \mapsto k.u \quad \text{si} \quad k \in K, u \in \mathrm{End}(V)\,,$$

et K est l'orbite de $1_V \in \mathrm{End}(V)$; on peut donc appliquer la proposition à l'espace vectoriel $\mathrm{End}(V)$.

PROPOSITION 2. *Soit* G *un groupe algébrique linéaire sur* $\mathbf{R}$, *et soit* K *un sous-groupe compact de* $G(\mathbf{R})$. *Soit* H *le plus petit sous-groupe algébrique réel de* G *contenant* K. *On a alors*

$$K = H(\mathbf{R})\,.$$

En effet, on peut plonger G comme sous-groupe algébrique fermé dans un groupe linéaire $\mathbf{GL}_n$; la proposition résulte alors du corollaire ci-dessus.

Remarque. Le groupe H peut aussi être défini comme l'*adhérence* de K dans G (pour la topologie de Zariski); il est en effet immédiat que cette adhérence est un sous-schéma en groupes de G. La bigèbre de H est le quotient de celle de G par l'idéal formé des fonctions dont la restriction à K est nulle.