

# 5.1. Algébricité des groupes compacts

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

b) Supposons que  $K$  soit un *corps topologique* (resp. un *corps valué complet non discret*) et que  $\Gamma$  soit muni d'une structure de *groupe topologique* (resp. de *groupe de Lie* sur  $K$ ). On peut prendre pour  $L$  la catégorie des représentations *continues* (resp.  *$K$ -analytiques*) de rang fini. Une fonction  $f \in C$  appartient à la bigèbre  $C_L$  correspondante si et seulement si elle est continue (resp. analytique): cela se vérifie sans difficulté. Le schéma  $G_L$  est appelé simplement *l'enveloppe* du groupe topologique  $\Gamma$  (resp. du groupe de Lie  $\Gamma$ ). On peut le caractériser par la propriété universelle suivante: si  $H$  est un groupe algébrique linéaire, tout homomorphisme *continu* (resp. *analytique*) de  $\Gamma$  dans le groupe topologique (resp. de Lie)  $H(K)$  se prolonge de façon unique en un morphisme de  $G_L$  dans  $H$ . Cela résulte simplement de la description de  $C_L$  donnée ci-dessus.

On notera que, même lorsque  $\Gamma$  est un groupe de Lie connexe de dimension finie, son enveloppe n'est pas en général un groupe algébrique (i.e.  $G_L$  ne possède en général pas de module *fidèle*, cf. exercice 1).

c) Soit  $k$  un corps complet pour une valuation discrète; on suppose  $k$  d'inégale caractéristique et de corps résiduel algébriquement clos. Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$  et soit  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ . Prenons pour  $K$  le corps  $\mathbf{Q}_p$  ( $p$  étant la caractéristique résiduelle de  $k$ ), et pour  $L$  la catégorie des  $\mathbf{Q}_p$ -représentations de  $\Gamma$  qui ont une «décomposition de Hodge» au sens de Tate (Driebergen). La catégorie  $L$  est saturée. Le groupe  $G_L$  correspondant est fort intéressant [du moins pour le rédacteur — les auditeurs du Collège, qui l'ont subi pendant trois mois, sont peut-être d'un avis différent].

## §5. GROUPES COMPACTS ET GROUPES COMPLEXES

Dans ce paragraphe, le corps de base est  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

### 5.1. ALGÈBRICITÉ DES GROUPES COMPACTS

PROPOSITION 1. *Soit  $K$  un groupe compact, opérant linéairement et continûment sur un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie. Toute orbite de  $K$  dans  $V$  est fermée pour la topologie de Zariski de  $V$  (relativement à  $\mathbf{R}$ ).*

Soit  $x \in V$ , et soit  $y$  un point de  $V$  n'appartenant pas à l'orbite  $Kx$  de  $x$ . Il nous faut construire une fonction polynomiale  $P$  sur  $V$  qui soit nulle sur  $Kx$  et non nulle en  $y$ . L'existence d'une telle fonction résulte du lemme plus précis suivant:

LEMME 1. *Il existe une fonction polynomiale  $P$  sur  $V$  qui prend les valeurs 0 en  $x$  et 1 en  $y$  et qui est invariante par  $K$ .*

Puisque  $Kx$  et  $Ky$  sont fermés et disjoints, il existe une fonction continue réelle  $f$  sur  $V$  qui vaut 0 sur  $Kx$  et 1 sur  $Ky$ . Comme les fonctions polynomiales sont denses dans les fonctions continues (pour la topologie de la convergence compacte), il existe une fonction polynomiale  $F$  sur  $V$  qui est  $\leq 1/3$  sur  $Kx$  et  $\geq 2/3$  sur  $Ky$ . Soit  $dk$  la mesure de Haar de  $K$ , normalisée de telle sorte que sa masse totale soit 1. La fonction  $F'$  définie par

$$F'(v) = \int_K F(k.v) dk$$

est une fonction polynomiale invariante par  $K$ ; si  $a$  (resp.  $b$ ) désigne la valeur de  $F'$  sur l'orbite  $Kx$  (resp.  $Ky$ ), on a  $a \leq 1/3$  et  $b \geq 2/3$ , d'où  $a \neq b$ . La fonction  $P = \frac{F' - a}{b - a}$  répond alors à la question.

COROLLAIRE. *L'image de  $K$  dans  $\text{Aut}(V)$  est fermée pour la topologie de Zariski de  $\text{End}(V)$  [et a fortiori pour celle de  $\text{Aut}(V)$ ].*

En effet,  $K$  opère linéairement sur  $\text{End}(V)$  par

$$(k, u) \mapsto k.u \quad \text{si } k \in K, u \in \text{End}(V),$$

et  $K$  est l'orbite de  $1_V \in \text{End}(V)$ ; on peut donc appliquer la proposition à l'espace vectoriel  $\text{End}(V)$ .

PROPOSITION 2. *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire sur  $\mathbf{R}$ , et soit  $K$  un sous-groupe compact de  $G(\mathbf{R})$ . Soit  $H$  le plus petit sous-groupe algébrique réel de  $G$  contenant  $K$ . On a alors*

$$K = H(\mathbf{R}).$$

En effet, on peut plonger  $G$  comme sous-groupe algébrique fermé dans un groupe linéaire  $\mathbf{GL}_n$ ; la proposition résulte alors du corollaire ci-dessus.

*Remarque.* Le groupe  $H$  peut aussi être défini comme l'adhérence de  $K$  dans  $G$  (pour la topologie de Zariski); il est en effet immédiat que cette adhérence est un sous-schéma en groupes de  $G$ . La bigèbre de  $H$  est le quotient de celle de  $G$  par l'idéal formé des fonctions dont la restriction à  $K$  est nulle.