

## 4.3. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE RELATIVEMENT À UNE CATÉGORIE DE REPRÉSENTATIONS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(viii) D'après le n° 4.1, tout  $\Gamma$ -module à droite  $E$  de rang fini est muni canoniquement d'une structure de  $C$ -comodule à gauche de rang fini (et inversement). Plus précisément, si  $(v_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$ , et si l'on a

$$(5) \quad v_i \gamma = \sum_{j \in I} c_{ij}(\gamma) v_j, \quad \text{avec } c_{ij} \in C,$$

le coproduit de  $E$  est donné par:

$$(6) \quad d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j.$$

(ix) La correspondance définie ci-dessus entre  $\Gamma$ -modules à droite de rang fini et  $C$ -comodules à gauche de rang fini est *compatible* avec les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente»; cela résulte de ce qui a été dit au n° 3.2, combiné avec (vii) ci-dessus.

*Remarque.* On peut caractériser  $G = \text{Spec}(C)$  par la propriété universelle suivante: tout homomorphisme de  $\Gamma$  dans le groupe  $H(K)$  des  $K$ -points d'un schéma en groupe affine  $H$  se prolonge de manière unique en un morphisme  $G \rightarrow H$ . Le foncteur  $\Gamma \mapsto G$  est donc *adjoint* du foncteur  $H \mapsto H(K)$ .

#### 4.3. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE RELATIVEMENT À UNE CATÉGORIE DE REPRÉSENTATIONS

On conserve les notations du numéro précédent.

DÉFINITION 1. Soit  $L$  une sous-catégorie pleine de la catégorie des  $\Gamma$ -modules à gauche de rang fini. On dit que  $L$  est saturée si  $L$  vérifie les conditions suivantes:

a) Si  $E \in L$  et si  $F$  est isomorphe, soit à un quotient de  $E$ , soit à un sous-objet de  $E$ , on a  $F \in L$ .

b)  $L$  est stable par somme directe finie, produit tensoriel et contragrédiente.

c) La représentation unité (de module  $K$ ) appartient à  $L$ . (Bien entendu, on a une notion analogue pour les  $\Gamma$ -modules à droite.)

THÉORÈME 1. Si  $L$  est saturée, il existe une sous-bigèbre  $C_L$  de  $C(\Gamma)$  et une seule telle que  $L$  soit la catégorie des  $C_L$ -comodules à droite de rang fini. La bigèbre  $C_L$  contient l'élément 1, vérifie les axiomes du n° 3.1, et est stable par l'inversion  $i$ .

Cela résulte des props. 2 et 3 du n° 3.3.

DÉFINITION 2. Le schéma  $G_L = \text{Spec}(C_L)$  est appelé l'enveloppe de  $\Gamma$  relativement à la catégorie saturée  $L$ .

Les propriétés suivantes de  $G_L$  résultent de sa définition et de ce qui a été démontré dans les paragraphes précédents:

- a)  $G_L$  est un quotient du schéma en groupes  $G$  défini au n° précédent.
- b) On a un homomorphisme canonique  $\Gamma \rightarrow G_L(K)$ . De plus, tout sous-schéma fermé de  $G_L$  contenant l'image de  $\Gamma$  est égal à  $G_L$  (cela exprime simplement le fait que les éléments de  $C_L$  sont des *fonctions* sur  $\Gamma$ ). En particulier, l'image de  $\Gamma$  dans  $G_L(K)$  est dense pour la topologie de Zariski.
- c) Le schéma  $G_L$  est absolument réduit.
- d) La bigèbre  $C_L$  est réunion des cogèbres  $C_E$  attachées aux éléments  $E$  de  $L$ .
- e) Si  $E \in L$ , soit  $G_E$  l'image de la représentation  $\rho: G_L \rightarrow \mathbf{GL}_E$  attachée à  $E$  (cf. n° 3.5). Le groupe  $G_E$  est l'adhérence (pour la topologie de Zariski) de l'image de  $\Gamma$  dans  $\mathbf{GL}_E(K) = \text{Aut}(E)$ .
- f) Soient  $E_1, E_2 \in L$ . Pour qu'il existe un morphisme  $G_{E_1} \rightarrow G_{E_2}$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \swarrow & & \searrow \\ G_{E_1}(K) & \rightarrow & G_{E_2}(K) \end{array}$$

soit commutatif, il faut et il suffit que  $E_2$  soit isomorphe à un quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations  $\otimes^n (E_1 \oplus \check{E}_1)$ . L'homomorphisme  $G_{E_1} \rightarrow G_{E_2}$  est alors unique.

- g) On a  $G = \varprojlim G_E$  (vis-à-vis des morphismes définis ci-dessus).
- h) Soit  $K_1 \in \text{Alg}_K$  et soit  $\nu_{K_1}$  le foncteur de  $L$  dans  $\text{Mod}_{K_1}$  défini par  $E \mapsto K_1 \otimes E$ . Il y a une bijection canonique (cf. n° 3.4) du groupe  $G_L(K_1)$  sur le groupe des automorphismes du foncteur  $\nu_{K_1}$  commutant au produit tensoriel et triviaux sur le module unité  $K$ .

*Remarque.* La détermination explicite de  $G_L$  (pour  $\Gamma$  et  $L$  donnés) est souvent un problème non trivial. On en verra quelques exemples au §5 (voir aussi les exercices du §4).

### Exemples

- a) On peut prendre pour  $L$  la catégorie de *toutes* les représentations linéaires de  $\Gamma$ ; le groupe  $G_L$  est alors le groupe  $G$  du numéro précédent.

b) Supposons que  $K$  soit un *corps topologique* (resp. un *corps valué complet non discret*) et que  $\Gamma$  soit muni d'une structure de *groupe topologique* (resp. de *groupe de Lie* sur  $K$ ). On peut prendre pour  $L$  la catégorie des représentations *continues* (resp.  *$K$ -analytiques*) de rang fini. Une fonction  $f \in C$  appartient à la bigèbre  $C_L$  correspondante si et seulement si elle est continue (resp. analytique): cela se vérifie sans difficulté. Le schéma  $G_L$  est appelé simplement *l'enveloppe* du groupe topologique  $\Gamma$  (resp. du groupe de Lie  $\Gamma$ ). On peut le caractériser par la propriété universelle suivante: si  $H$  est un groupe algébrique linéaire, tout homomorphisme *continu* (resp. *analytique*) de  $\Gamma$  dans le groupe topologique (resp. de Lie)  $H(K)$  se prolonge de façon unique en un morphisme de  $G_L$  dans  $H$ . Cela résulte simplement de la description de  $C_L$  donnée ci-dessus.

On notera que, même lorsque  $\Gamma$  est un groupe de Lie connexe de dimension finie, son enveloppe n'est pas en général un groupe algébrique (i.e.  $G_L$  ne possède en général pas de module *fidèle*, cf. exercice 1).

c) Soit  $k$  un corps complet pour une valuation discrète; on suppose  $k$  d'inégale caractéristique et de corps résiduel algébriquement clos. Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$  et soit  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ . Prenons pour  $K$  le corps  $\mathbf{Q}_p$  ( $p$  étant la caractéristique résiduelle de  $k$ ), et pour  $L$  la catégorie des  $\mathbf{Q}_p$ -représentations de  $\Gamma$  qui ont une «décomposition de Hodge» au sens de Tate (Driebergen). La catégorie  $L$  est saturée. Le groupe  $G_L$  correspondant est fort intéressant [du moins pour le rédacteur — les auditeurs du Collège, qui l'ont subi pendant trois mois, sont peut-être d'un avis différent].

## §5. GROUPES COMPACTS ET GROUPES COMPLEXES

Dans ce paragraphe, le corps de base est  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

### 5.1. ALGÈBRICITÉ DES GROUPES COMPACTS

PROPOSITION 1. *Soit  $K$  un groupe compact, opérant linéairement et continûment sur un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie. Toute orbite de  $K$  dans  $V$  est fermée pour la topologie de Zariski de  $V$  (relativement à  $\mathbf{R}$ ).*

Soit  $x \in V$ , et soit  $y$  un point de  $V$  n'appartenant pas à l'orbite  $Kx$  de  $x$ . Il nous faut construire une fonction polynomiale  $P$  sur  $V$  qui soit nulle sur  $Kx$  et non nulle en  $y$ . L'existence d'une telle fonction résulte du lemme plus précis suivant: