§4. Enveloppes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

DÉFINITION 3. *Soit C une bigèbre possédant une inversion. Un C-comodule E de rang fini est dit fidèle si $C(E \oplus \check{E}) = C$.*

Vu ce qui précède, E est fidèle si et seulement si $G \to G_E$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 8. *Si E est fidèle, toute représentation linéaire de G est quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations $\overset{n}{\otimes}(E \oplus \check{E})$.*

Cela résulte du lemme 1 du n° 2.4.

COROLLAIRE. *Tout G-module simple est quotient de Jordan-Hölder d'un $\overset{n}{\otimes}(E \oplus \check{E})$.*

Remarques

1) Dans le corollaire ci-dessus, on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par les représentations $\overset{n}{\otimes} E \overset{m}{\otimes} \det(E)^{-1}$, avec des notations évidentes.

2) Il se peut que G_E soit fermé dans End_E (et non pas seulement dans $\mathbf{GL}_E$), autrement dit que $C(E) = C(E \oplus \check{E})$. C'est le cas, par exemple, si G_E est contenu dans $\mathbf{SL}_E$. Dans ce cas, la prop. 8 et son corollaire se simplifient: on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par celles de E.

§4. ENVELOPPES

4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE

[Ce sorite pourrait remonter au n° 2.2.]

Soit A une algèbre associative à élément unité. Soit S_d (resp. S_g, S) l'ensemble des idéaux à droite (resp. à gauche, resp. bilatères) de codimension finie dans A. On a $S_d \cap S_g = S$ et S est *cofinal* à la fois dans S_d et dans S_g; en effet, si $\mathfrak{a} \in S_g$ par exemple, l'annulateur du A-module $A/\mathfrak{a}$ appartient à S et est contenu dans $\mathfrak{a}$.

On posera:

$$\hat{A} = \varprojlim . A/\mathfrak{a}$$

la limite projective étant prise sur l'ensemble ordonné filtrant S. L'algèbre $\hat{A}$ est *l'algèbre profinie complétée* de A, pour la topologie définie par S (ou S_d, ou S_g, cela revient au même). Il y a un isomorphisme évident de la catégorie

des A-modules de rang fini sur celle des $\hat{A}$-modules topologiques discrets de rang fini.

Soit F le dual de A; on le munit de sa structure naturelle de A-bimodule. Si $\mathfrak{a} \in S$, soit $F_{\mathfrak{a}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans F. Soit C la réunion des $F_{\mathfrak{a}}$, pour $\mathfrak{a} \in S$. Le dual de C (resp. le dual topologique de $\hat{A}$) s'identifie de façon évidente à $\hat{A}$ (resp. à C). D'après le n° 2.2, il y a donc sur C une structure de *cogèbre,* caractérisée par la formule:

$$(1) \qquad < d(c), a \otimes b > = < c, ab > \quad \text{si} \quad c \in C, a, b \in A .$$

De plus, tout A-module à droite de rang fini est muni canoniquement d'une structure de comodule à gauche sur C, et réciproquement; on a

$$(2) \qquad < d_E(x), a \otimes x' > = < xa, x' > \quad \text{si} \quad x \in E, x' \in E', a \in A$$

d'après la formule (1) du n° 2.2.

Les éléments de la cogèbre C peuvent être caractérisés de la manière suivante:

LEMME 1. *Soit f un élément du dual F de A. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f \in C$.

(b) (resp. (b')) *Le sous-A-module à gauche* (resp. à droite) *de F engendré par f est de rang fini.*

(c) *Il existe un A-module à droite E de rang fini, et des éléments $x_i \in E, x_i' \in E'$ en nombre fini, tels que*

$$< f, a > = \sum < x_i a, x_i' > \quad \textit{pour tout} \quad a \in A .$$

La condition (b) signifie que l'annulateur de f dans le A-module à gauche F appartient à S_g; comme S est cofinal dans S_g, cela revient à dire que f appartient à C. On démontre de même que (a) $\Leftrightarrow$ (b').

D'autre part, pour un module E donné, la condition (c) signifie que f appartient à la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1). Comme C est réunion des C_E, cela prouve que (a) $\Leftrightarrow$ (c).

[On laisse au lecteur le plaisir de démontrer directement l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c).]

4.2. LA BIGÈBRE D'UN GROUPE

On applique ce qui précède à l'algèbre $A = K[\Gamma]$ d'un groupe Γ. Le dual $F = F(\Gamma)$ de A est *l'espace des fonctions* sur Γ; la dualité entre A et F s'exprime par la formule:

$$< f, \sum \lambda_i \gamma_i > = \sum \lambda_i f(\gamma_i) \quad \text{si} \quad f \in F, \lambda_i \in K, \gamma_i \in \Gamma .$$

La cogèbre correspondante est notée $C = C(\Gamma)$. Elle jouit des propriétés suivantes:

(i) La co-unité de C est l'application $e: f \mapsto f(1)$.

(ii) Pour qu'une fonction f appartienne à C, il faut et il suffit que *ses translatées* (à gauche ou à droite) *engendrent un K-espace vectoriel de dimension finie.* (C'est l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) du Lemme 1.)

(iii) Identifions à la façon habituelle les éléments de $F \otimes F$ aux *fonctions décomposables* sur $\Gamma \times \Gamma$. Si $f \in C$, on a $d(f) \in C \otimes C$ et $C \otimes C$ est un sous-espace de $F \otimes F$; ainsi $d(f)$ peut être interprétée comme une fonction sur $\Gamma \times \Gamma$. *On a*:

$$d(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1 \gamma_2) \quad \text{si} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \,. \tag{3}$$

(Cela ne fait que traduire la formule (1) du n° précédent.)

(iv) C contient 1, et est stable par le *produit*: cela résulte de (ii).

(v) Les structures de cogèbre et d'algèbre de C sont *compatibles* entre elles, i.e. elles font de C une *bigèbre.* Cette bigèbre vérifie les axiomes du n° 3.1. (L'axiome (i) dit que $f \mapsto d(f)$ doit être un morphisme d'*algèbres*; c'est le cas. Les autres axiomes sont encore plus évidents.)

(vi) La bigèbre C possède une *inversion* i donnée par

$$i(f)(\gamma) = f(\gamma^{-1}) \,. \tag{4}$$

(Il faut vérifier les conditions (a) et (b) du n° 3.1. La condition (a) est évidemment satisfaite. Pour (b), soit $f \in C$ et écrivons $d(f)$ sous la forme $\sum_\alpha g_\alpha \otimes h_\alpha$. On a

$$(1_C \otimes i)(d(f)) = \sum g_\alpha \otimes i(h_\alpha)$$

et l'on doit voir que $\sum g_\alpha . i(h_\alpha) = e(f).1$. Or, si $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \sum g_\alpha(\gamma)\, i(h_\alpha)(\gamma) &= \sum g_\alpha(\gamma)\, h_\alpha(\gamma^{-1}) = d(f)(\gamma, \gamma^{-1}) \\ &= f(\gamma . \gamma^{-1}) = f(1) = e(f) \,, \end{aligned}$$

d'où la formule voulue.)

(vii) Soit $G = \mathrm{Spec}(C)$ le *schéma en groupes* attaché à C. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ définit un morphisme $f \mapsto f(\gamma)$ de C dans K, donc un élément du groupe $G(K)$ des points de G à valeurs dans K. *L'application* $\Gamma \to G(K)$ *ainsi définie est un homomorphisme*; cela résulte de la définition de la loi de composition de $G(K)$.

(viii) D'après le n° 4.1, tout Γ-module à droite E de rang fini est muni canoniquement d'une structure de C-comodule à gauche de rang fini (et inversement). Plus précisément, si $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E, et si l'on a

$$v_i\gamma = \sum_{j \in I} c_{ij}(\gamma) v_j \ , \quad \text{avec} \quad c_{ij} \in C \ , \tag{5}$$

le coproduit de E est donné par:

$$d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j \ . \tag{6}$$

(ix) La correspondance définie ci-dessus entre Γ-modules à droite de rang fini et C-comodules à gauche de rang fini est *compatible* avec les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente»; cela résulte de ce qui a été dit au n° 3.2, combiné avec (vii) ci-dessus.

Remarque. On peut caractériser $G = \mathrm{Spec}(C)$ par la propriété universelle suivante: tout homomorphisme de Γ dans le groupe $H(K)$ des K-points d'un schéma en groupe affine H se prolonge de manière unique en un morphisme $G \to H$. Le foncteur $\Gamma \mapsto G$ est donc *adjoint* du foncteur $H \mapsto H(K)$.

4.3. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE RELATIVEMENT À UNE CATÉGORIE DE REPRÉSENTATIONS

On conserve les notations du numéro précédent.

DÉFINITION 1. *Soit L une sous-catégorie pleine de la catégorie des Γ-modules à gauche de rang fini. On dit que L est saturée si L vérifie les conditions suivantes:*

a) *Si $E \in L$ et si F est isomorphe, soit à un quotient de E, soit à un sous-objet de E, on a $F \in L$.*

b) *L est stable par somme directe finie, produit tensoriel et contragrédiente.*

c) *La représentation unité (de module K) appartient à L.* (Bien entendu, on a une notion analogue pour les Γ-modules à droite.)

THÉORÈME 1. *Si L est saturée, il existe une sous-bigèbre C_L de $C(\Gamma)$ et une seule telle que L soit la catégorie des C_L-comodules à droite de rang fini. La bigèbre C_L contient l'élément* 1, *vérifie les axiomes du* n° 3.1, *et est stable par l'inversion i.*

Cela résulte des props. 2 et 3 du n° 3.3.

DÉFINITION 2. *Le schéma* $G_L = \mathrm{Spec}(C_L)$ *est appelé l'enveloppe de* Γ *relativement à la catégorie saturée* L.

Les propriétés suivantes de G_L résultent de sa définition et de ce qui a été démontré dans les paragraphes précédents:

a) G_L est un quotient du schéma en groupes G défini au n° précédent.

b) On a un homomorphisme canonique $\Gamma \to G_L(K)$. De plus, tout sous-schéma fermé de G_L contenant l'image de Γ est égal à G_L (cela exprime simplement le fait que les éléments de C_L sont des *fonctions* sur Γ). En particulier, l'image de Γ dans $G_L(K)$ est dense pour la topologie de Zariski.

c) Le schéma G_L est absolument réduit.

d) La bigèbre C_L est réunion des cogèbres C_E attachées aux éléments E de L.

e) Si $E \in L$, soit G_E l'image de la représentation $\rho: G_L \to \mathbf{GL}_E$ attachée à E (cf. n° 3.5). Le groupe G_E est l'adhérence (pour la topologie de Zariski) de l'image de Γ dans $\mathbf{GL}_E(K) = \mathrm{Aut}(E)$.

f) Soient $E_1, E_2 \in L$. Pour qu'il existe un morphisme $G_{E_1} \to G_{E_2}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \swarrow & & \searrow \\ G_{E_1}(K) & \to & G_{E_2}(K) \end{array}$$

soit commutatif, il faut et il suffit que E_2 soit isomorphe à un quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations $\otimes^n(E_1 \oplus \check{E}_1)$. L'homomorphisme $G_{E_1} \to G_{E_2}$ est alors unique.

g) On a $G = \varprojlim . G_E$ (vis-à-vis des morphismes définis ci-dessus).

h) Soit $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$ et soit v_{K_1} le foncteur de L dans Mod_{K_1} défini par $E \mapsto K_1 \otimes E$. Il y a une bijection canonique (cf. n° 3.4) du groupe $G_L(K_1)$ sur le groupe des automorphismes du foncteur v_{K_1} commutant au produit tensoriel et triviaux sur le module unité K.

Remarque. La détermination explicite de G_L (pour Γ et L donnés) est souvent un problème non trivial. On en verra quelques exemples au § 5 (voir aussi les exercices du § 4).

Exemples

a) On peut prendre pour L la catégorie de *toutes* les représentations linéaires de Γ; le groupe G_L est alors le groupe G du numéro précédent.

b) Supposons que K soit un *corps topologique* (resp. *un corps valué complet non discret*) et que Γ soit muni d'une structure de *groupe topologique* (resp. de *groupe de Lie* sur K). On peut prendre pour L la catégorie des représentations *continues* (resp. *K-analytiques*) de rang fini. Une fonction $f \in C$ appartient à la bigèbre C_L correspondante si et seulement si elle est continue (resp. analytique): cela se vérifie sans difficulté. Le schéma G_L est appelé simplement *l'enveloppe* du groupe topologique Γ (resp. du groupe de Lie Γ). On peut le caractériser par la propriété universelle suivante: si H est un groupe algébrique linéaire, tout homomorphisme *continu* (resp. *analytique*) de Γ dans le groupe topologique (resp. de Lie) $H(K)$ se prolonge de façon unique en un morphisme de G_L dans H. Cela résulte simplement de la description de C_L donnée ci-dessus.

On notera que, même lorsque Γ est un groupe de Lie connexe de dimension finie, son enveloppe n'est pas en général un groupe algébrique (i.e. G_L ne possède en général pas de module *fidèle*, cf. exercice 1).

c) Soit k un corps complet pour une valuation discrète; on suppose k d'inégale caractéristique et de corps résiduel algébriquement clos. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Prenons pour K le corps $\mathbf{Q}_p$ (p étant la caractéristique résiduelle de k), et pour L la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de Γ qui ont une «décomposition de Hodge» au sens de Tate (Driebergen). La catégorie L est saturée. Le groupe G_L correspondant est fort intéressant [du moins pour le rédacteur — les auditeurs du Collège, qui l'ont subi pendant trois mois, sont peut-être d'un avis différent].

§5. Groupes compacts et groupes complexes

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

5.1. Algébricité des groupes compacts

Proposition 1. *Soit K un groupe compact, opérant linéairement et continûment sur un espace vectoriel réel V de dimension finie. Toute orbite de K dans V est fermée pour la topologie de Zariski de V* (relativement à $\mathbf{R}$).

Soit $x \in V$, et soit y un point de V n'appartenant pas à l'orbite Kx de x. Il nous faut construire une fonction polynomiale P sur V qui soit nulle sur Kx et non nulle en y. L'existence d'une telle fonction résulte du lemme plus précis suivant: