3.3. SOUS-BIGÈBRES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3.3. Sous-bigèbres

(On suppose à nouveau que K est un corps.)
Soit C une bigèbre (vérifiant les conditions du n° 3.1), et soit L une sous-catégorie abélienne de Com_C^f vérifiant les conditions 1), 2), 3) du th. 2 du n° 2.4, i.e. provenant d'une sous-cogèbre D de C.

Proposition 2. *Pour que D soit une sous-bigèbre de C contenant 1, il faut et il suffit que L soit stable par produit tensoriel et contienne le comodule unité K.*

La nécessité est triviale. Supposons donc que L soit stable par $\otimes$ et contienne K. On sait (cf. n° 2.4) que D est réunion des cogèbres C_E attachées aux comodules $E \in L$. Le fait que D soit stable par le produit résultera donc du lemme suivant:

Lemme 1. *Si E et F sont des comodules de rang fini, on a*

$$(*) \qquad C_{E\otimes F} = C_E . C_F .$$

En effet, on vérifie tout de suite que $C_E \otimes C_F$ est la sous-cogèbre de $C \otimes C$ attachée au $C \otimes C$-comodule $E \otimes F$. Comme $C_{E\otimes F}$ est l'image de cette dernière par $m : C \otimes C \to C$, c'est bien $C_E . C_F$.

Le fait que D contienne 1 provient de ce que $C_E = K.1$ si $E = K$.

Proposition 3. *Supposons que C ait une inversion i. Pour que D soit stable par i, il faut et il suffit que L soit stable par le foncteur «contragrédiente».*

Cela résulte, comme ci-dessus, de la formule:

$$(**) \qquad C_E^\vee = i(C_E) .$$

Corollaire. *Supposons que $G = \mathrm{Spec}(C)$ soit un schéma en groupes. Soit Mod_G^f la catégorie des G-modules de rang fini, et soit L une sous-catégorie abélienne de Mod_G^f. Pour qu'il existe un quotient H de G tel que $L = \mathrm{Mod}_H^f$, il faut et il suffit que L vérifie les conditions 1), 2), 3) du th. 2 du n° 2.4, soit stable par les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente», et contienne le G-module unité K; le groupe H en question est alors unique.*

Ce n'est qu'une reformulation des props. 2 et 3, étant entendu que «groupe quotient» est pris pour synonyme de «sous-bigèbre contenant 1». L'unicité de H provient du th. 2 du n° 2.4.

[Il y a un résultat plus général, dû sauf erreur à Grothendieck, et que le rédacteur a la flemme de rédiger en détail. Au lieu de se donner, comme ici, une sous-cogèbre d'une bigèbre, on se donne seulement une *cogèbre D* et une opération de «produit tensoriel» sur la catégorie $M = \mathrm{Com}^f_D$ correspondante (la donnée de D est d'ailleurs équivalente à celle du couple formé de M et du foncteur $v: M \to \mathrm{Vect}_K$, cf. n° 2.5, th. 3). En imposant à ce produit tensoriel des conditions raisonnables (en particulier $v(E \otimes F) \simeq v(E) \otimes v(F)$) on démontre alors qu'il provient d'une structure de *bigèbre* bien déterminée sur D; cette bigèbre a un élément unité si M contient un élément unité pour le produit tensoriel; elle a une inversion, si l'on se donne une opération «contragrédiente». (Au lieu de se donner le produit tensoriel et la contragrédiente, on peut aussi se donner un foncteur «Hom».)

Grothendieck a rencontré cette situation avec $K = \mathbf{Q}$, M = catégorie des *motifs* sur un corps de base k et v = foncteur «cohomologie à valeurs dans $\mathbf{Q}$» relativement à un plongement de k dans $\mathbf{C}$.]

3.4. Une interprétation des points de G

Soit $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$ et soit $g \in G(K_1)$ un point de G à valeurs dans K_1. Pour tout $E \in \mathrm{Com}^f_C$, notons $g(E)$ l'image de g par l'antireprésentation

$$\rho(E): G(K_1) \to \mathrm{End}_E(K_1) .$$

On a donc $g(E) \in \mathrm{End}_E(K_1) = \mathrm{End}_{K_1}(K_1 \otimes E)$, et de plus:

(i) $g(K) = 1_{K_1}$

(ii) $g(E_1 \otimes E_2) = g(E_1) \otimes g(E_2)$.

Réciproquement:

Proposition 4. *Soit* $v_{K_1}: \mathrm{Com}^f_C \to \mathrm{Mod}_{K_1}$ *le foncteur qui associe à tout* $E \in \mathrm{Com}^f_C$ *le* K_1*-module* $K_1 \otimes E$. *Soit* $\varphi: v_{K_1} \to v_{K_1}$ *un endomorphisme de* v_{K_1} *vérifiant les relations* (i) *et* (ii) *ci-dessus. Il existe alors un élément unique* $g \in G(K_1)$ *tel que* $\varphi = g$.

D'après 3.2, l'application $G(K_1) \to \mathrm{End}(v_{K_1})$ est un antihomomorphisme de monoïdes. La prop. 4 donne donc:

Corollaire. *Le monoïde* $G(K_1)$ *est isomorphe à l'opposé du monoïde des endomorphismes de* v_{K_1} *vérifiant* (i) *et* (ii).

[C'est là un résultat analogue au *théorème de dualité de Tannaka*; on reviendra là-dessus plus loin.]