3.2. Correspondance entre comodules et G-modules

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

(iv) La co-unité $e\colon C \to K$ est un morphisme d'algèbres et $e(1) = 1$.

(v) On a $d(1) = 1 \otimes 1$.

La condition (iii) permet de considérer C comme l'*algèbre affine* d'un schéma affine G sur K; on a $G = \mathrm{Spec}(C)$. Pour tout $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$, on note $G(K_1)$ l'ensemble des points de G à valeurs dans K_1, autrement dit l'ensemble des morphismes (au sens de Alg_K) de C dans K_1. La condition (iv) signifie que e est un élément de $G(K)$. Grâce aux conditions (i) et (v), la structure de cogèbre de C peut être interprétée comme un *morphisme* de $G \times G$ dans G, qui est *associatif* et admet e pour élément neutre. Ainsi G est un *schéma affine en monoïdes* sur K; pour tout $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$, $G(K_1)$ a une structure naturelle de monoïde, d'élément neutre l'image de e dans $G(K_1)$, image que l'on se permet de noter encore e.

On appelle *inversion* sur C, toute application $i\colon C \to C$ ayant les propriétés suivantes:

a) i est un morphisme d'algèbres, et $i(1) = 1$.

b) $m \circ (1_C \otimes i) \circ d$ est égal à l'endomorphisme $c \mapsto e(c).1$ de C.

La condition a) permet d'interpréter i comme un morphisme $I\colon G \to G$ et la condition b) signifie que $x.I(x) = e$ pour tout $x \in G(K_1)$, et tout K_1. On voit ainsi que, si i existe, il est unique, et que c'est un isomorphisme de C sur la bigèbre opposée C^o. L'existence de i revient à dire que G est un *schéma en groupes.*

Remarque. L'application identique $C \to C$ est un point de $G(C)$, appelé *point canonique*; nous le noterons γ. De même, on peut interpréter une inversion i de C comme un point ι de $G(C)$ et la condition b) signifie que $\gamma\iota = e$.

3.2. Correspondance entre comodules et G-modules

Soit E un module. Si $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$, nous noterons $\mathrm{End}_E(K_1)$ le monoïde des endomorphismes du K_1-module $K_1 \otimes E$, et $\mathrm{Aut}_E(K_1)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathrm{End}_E(K_1)$. Si $K_1 \to K_2$ est un morphisme, on définit de manière évidente le morphisme correspondant de $\mathrm{End}_E(K_1)$ dans $\mathrm{End}_E(K_2)$. Ainsi End_E est un foncteur de Alg_K dans la catégorie Mon des monoïdes; de même Aut_E est un foncteur de Alg_K dans la catégorie Gr des groupes.

Soient maintenant C et $G = \mathrm{Spec}(C)$ comme ci-dessus. On a vu que G définit un foncteur (noté également G) de Alg_K dans Mon; ce foncteur est à valeurs dans Gr si G est un schéma en groupes.

DÉFINITION 1. *On appelle représentation linéaire de* G *dans* E *tout morphisme* ρ *du foncteur* G *dans le foncteur* End_E.

En d'autres termes, ρ consiste en la donnée, pour tout $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$, d'un morphisme de monoïdes $\rho(K_1): G(K_1) \to \mathrm{End}_E(K_1)$ et, si $K_1 \to K_2$ est un morphisme dans Alg_K, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(K_1) & \to & G(K_2) \\ \rho(K_1) \downarrow & & \downarrow \rho(K_2) \\ \mathrm{End}_E(K_1) & \to & \mathrm{End}_E(K_2) \end{array}$$

doit être commutatif.

Terminologie. Une représentation linéaire du monoïde G^o opposé à G est appelée une *antireprésentation* de G. Un module E, muni d'une représentation (resp. antireprésentation) $G \to \mathrm{End}_E$ est appelé un *G-module* à gauche (resp. à droite).

Remarque. Si G est un schéma en groupes, et si $\rho: G \to \mathrm{End}_E$ est une représentation linéaire de G dans E, il est clair que ρ prend ses valeurs dans le sous-foncteur Aut_E de End_E.

Notons maintenant G^{ens} le foncteur G, considéré comme foncteur à valeurs dans Ens (i.e. le composé $\mathrm{Alg}_K \xrightarrow{G} \mathrm{Mon} \to \mathrm{Ens}$); définissons de même $\mathrm{End}_E^{\mathrm{ens}}$. Soit ρ un morphisme de G^{ens} dans $\mathrm{End}_E^{\mathrm{ens}}$. L'image par $\rho(C)$ du point canonique $\gamma \in G(C)$ est un C-endomorphisme de $C \otimes E$, donc est définie par une application K-linéaire $d(\rho): E \to C \otimes E$.

PROPOSITION 1. (a) *L'application* $\rho \mapsto d(\rho)$ *est une bijection de l'ensemble des morphismes de* G^{ens} *dans* $\mathrm{End}_E^{\mathrm{ens}}$ *sur l'ensemble* $\mathrm{Hom}(E, C \otimes E)$.

(b) *Pour que* $\rho: G^{\mathrm{ens}} \to \mathrm{End}_E^{\mathrm{ens}}$ *soit une représentation linéaire* (resp. une antireprésentation linéaire) *de* G *dans* E, *il faut et il suffit que* $d(\rho)$ *munisse* E *d'une structure de C-comodule à droite* (resp. à gauche).

C'est là un résultat bien connu (cf. *SGAD,* exposé I). Rappelons la démonstration:

L'assertion (a) provient de ce que G^{ens} est représentable par le couple (C, γ). En particulier, si $x \in G(K_1)$, l'image de x par $\rho(K_1)$ est l'application K_1-linéaire de $K_1 \otimes E$ dans $K_1 \otimes E$ qui prolonge l'application linéaire $(x \otimes 1_E) \circ d(\rho)$ de E dans $K_1 \otimes E$.

Pour (b), on peut se borner au cas des antireprésentations. Il faut d'abord exprimer que $\rho(K_1)$ transforme e en 1 pour tout K_1, et il suffit de le faire pour $K_1 = K$. Cela donne la condition

$$(e \otimes 1_E) \circ d(\rho) = 1_E$$

qui est l'axiome (2) des comodules.

Il faut ensuite exprimer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G^{\mathrm{ens}} \times G^{\mathrm{ens}} & \xrightarrow{\rho \times \rho} & \mathrm{End}_E^{\mathrm{ens}} \times \mathrm{End}_E^{\mathrm{ens}} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ G^{\mathrm{ens}} & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{End}_E^{\mathrm{ens}} \end{array}$$

(où α désigne la loi de composition de G et β l'*opposée* de la loi de composition de End_E) est commutatif. Notons γ_1 (resp. γ_2) l'homomorphisme de C dans $C \otimes C$ qui applique $x \in C$ dans $x \otimes 1$ (resp. $1 \otimes x$); on a $\gamma_1, \gamma_2 \in G(C \otimes C)$. De plus, il est immédiat que le foncteur $G^{\mathrm{ens}} \times G^{\mathrm{ens}}$ est représentable par $(C \otimes C, \gamma_1 \times \gamma_2)$. Il suffit donc d'exprimer que les deux images de $\gamma_1 \times \gamma_2$ dans $\mathrm{End}_E(C \otimes C)$ coïncident. Or l'image de $\gamma_1 \times \gamma_2$ dans $G(C \otimes C)$ est le point donné par $d\colon C \to C \otimes C$; son image dans $\mathrm{End}_E(C \otimes C)$, identifié à $\mathrm{Hom}(E, C \otimes C \otimes E)$ est donc $(d \otimes 1_E) \circ d(\rho)$. Il faut ensuite calculer l'image de $\gamma_1 \times \gamma_2$ par $G \times G \xrightarrow{\rho \times \rho} \mathrm{End}_E \times \mathrm{End}_E \xrightarrow{\beta} \mathrm{End}_E$. On trouve, après un calcul sans difficultés [cf. ci-après] l'élément $(1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho)$. La commutativité du diagramme considéré équivaut donc à l'axiome (1) des comodules, ce qui achève de démontrer la proposition.

[Voici le «calcul sans difficultés» en question. Il s'agit de déterminer l'image $\varphi \in \mathrm{End}_E(C \otimes C)$ de $\gamma_1 \times \gamma_2$ par $\beta \circ (\rho \times \rho)$. Si φ_1 (resp. φ_2) est l'image de γ_1 (resp. γ_2) par ρ, on a $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ (puisque β est l'*opposée* de la loi de composition). De plus, φ_i est caractérisé par le fait de prolonger l'application K-linéaire $(\gamma_i \otimes 1_E) \circ d(\rho)\colon E \to C \otimes E \to C \otimes C \otimes E$. Soit alors $x \in E$, et posons:

$$d(\rho)(x) = \sum c_i \otimes x_i\,, \qquad d(\rho)(x_i) = \sum c_{ij} \otimes x_{ij}\,.$$

On a:

$$\varphi_1(x) = (\gamma_1 \otimes 1_E)\left(\sum c_i \otimes x_i\right) = \sum c_i \otimes 1 \otimes x_i\,.$$

De même:

$$\varphi_2(x_i) = \sum 1 \otimes c_{ij} \otimes x_{ij}\,.$$

D'où:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_2(\varphi_1(x)) = \sum \varphi_2(c_i \otimes 1 \otimes x_i) \\ &= \sum (c_i \otimes 1) \,.\, \sum 1 \otimes c_{ij} \otimes x_{ij} \quad (\varphi_2 \text{ étant } C \otimes C\text{-linéaire}) \\ &= \sum c_i \otimes c_{ij} \otimes x_{ij}\,. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$((1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho))(x) = (1_C \otimes d(\rho))(\sum c_i \otimes x_i)$$
$$= \sum c_i \otimes c_{ij} \otimes x_{ij}\,.$$

En comparant, on voit bien que l'on a

$$\varphi = (1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho)\,.]$$

Remarque. La proposition précédente permet donc d'identifier les *G-modules à gauche* aux *C-comodules à droite,* et inversement. [Il est bien triste d'avoir ainsi à échanger sa droite et sa gauche, mais on n'y peut rien. Toutefois, lorsque G est un schéma en *groupes*, on peut, au moyen de l'inverse, transformer canoniquement tout module à droite en un module à gauche.]

Exemple. La représentation *triviale* $\rho = 1$ de G dans un module E correspond à la structure de comodule $x \mapsto 1 \otimes x$ sur E. Pour $E = K$ on obtient le comodule *unité.*

OPÉRATIONS SUR LES COMODULES

a) *Produit tensoriel.*

Si E_1 et E_2 sont des C-modules (à gauche, par exemple), on a défini au n° 1.2 une structure de $C \otimes C$-comodule sur $E_1 \otimes E_2$. Comme $m: C \otimes C \to C$ est un morphisme de cogèbres, on déduit de là *une structure de C-comodule sur* $E_1 \otimes E_2$. Du fait que m est commutative, cette structure ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit E_1 et E_2. Elle correspond (*via* la prop. 1) à l'opération évidente de *produit tensoriel de G-modules* (la vérification de ce fait est immédiate).

b) *Contragrédiente.*

Supposons que C admette une inversion, et soit E un C-comodule à gauche qui est projectif de type fini comme module. En utilisant les isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(E, C \otimes E) \simeq \mathrm{Hom}(E \otimes E', C) \simeq \mathrm{Hom}(E', C \otimes E')$$

on définit sur E' une structure de C-module à droite. En utilisant l'inversion i, on transforme cette structure en une structure de C-comodule à gauche, dite *contragrédiente* de celle donnée sur E et notée $\check{E}$. Elle correspond (*via* la prop. 1) à l'opération évidente de «*contragrédiente d'une représentation*». [L'hypothèse faite sur E sert à assurer que le foncteur «dual» commute au foncteur «extension des scalaires».]