2.5. OÙ L'ON CARACTÉRISE Com_C^f

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2) Il n'est pas indispensable de passer aux modules pour prouver le lemme 1. On remarque d'abord (cf. n° 1.4, Exemple 2) que F est isomorphe à un sous-comodule de $C_E \otimes F$, i.e. de $(C_E)^n$, avec $n = \mathrm{rang}(F)$. D'autre part, C_E est isomorphe, comme comodule, à un quotient de $E \otimes E'$, c'est-à-dire de E^m, où $m = \mathrm{rang}(E)$. D'où le résultat.

Exemples

1) La sous-catégorie de Com^f_C formée des *objets semi-simples* correspond à la *plus grande sous-cogèbre semi-simple* de C (la somme de toutes les sous-cogèbres simples).

2) Supposons C semi-simple, et soit $(E_i)_{i \in I}$ un ensemble de représentants des classes de C-comodules simples. Posons $C_i = C_{E_i}$, de sorte que C est somme directe des cogèbres simples C_i. Si J est une partie de I, $C_J = \sum_{i \in J} C_i$ est une sous-cogèbre de C, et toute sous-cogèbre de C s'obtient de cette manière, et de façon unique. La sous-catégorie correspondant à C_J est formée des comodules isomorphes à des sommes directes finies des E_i, $i \in J$.

2.5. Où l'on caractérise Com^f_C

Soit M une catégorie abélienne munie des deux structures suivantes:

a) M est une catégorie *sur* K; cela signifie que, si E, F sont des objets de M, $\mathrm{Hom}^M(E, F)$ est muni d'une structure de K-espace vectoriel, la composition des morphismes étant bilinéaire.

b) On se donne un foncteur $v: M \to \mathrm{Vect}^f_K$ de M dans la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

On fait les *hypothèses* suivantes:

(i) Le foncteur v est *K-linéaire,* i.e. pour tout $E, F \in M$, l'application $v: \mathrm{Hom}^M(E, F) \to \mathrm{Hom}(v(E), v(F))$ est K-linéaire.

(ii) Le foncteur v est *exact* et *fidèle.*

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une cogèbre C sur K* (et une seule, à isomorphisme près) *telle que M soit équivalente à Com^f_C, cette équivalence transformant le foncteur v en le foncteur C-module $\mapsto$ espace vectoriel sous-jacent.*

[Ici, il est nécessaire d'interpréter M comme une petite catégorie, ou en tout cas de supposer qu'il existe un ensemble de représentants pour les classes d'isomorphisme d'objets de M.]

Avant de commencer la démonstration, remarquons que les hypothèses (i) et (ii) entraînent que $\mathrm{Hom}^M(E, F)$ est un espace vectoriel *de dimension finie* pour tout $E, F \in M$. De plus, un sous-objet d'un objet E de M est connu lorsqu'on connaît le sous-espace vectoriel correspondant de $v(E)$; l'ensemble des sous-objets de E s'identifie ainsi à un sous-ensemble réticulé de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $v(E)$; en particulier, E est *de longueur finie*. On a des résultats analogues pour les objets quotients.

D'autre part, si $E \in M$, nous noterons M_E la sous-catégorie pleine de M formée des quotients F/G, où F est isomorphe à un sous-objet d'un E^n (n entier > 0 quelconque).

Enfin, si E est un objet de M, et si X est une partie de $V(E)$, nous dirons que X *engendre* E si tout sous-objet F de E tel que $v(F) \supset X$ est égal à E.

Démonstration du théorème 3

a) *Le cas fini; une majoration.*

C'est celui où il existe un objet E de M tel que $M_E = M$. Soit $n = \mathrm{rang}_K v(E)$.

LEMME 2. *Soit F un objet de M pouvant être engendré par un élément* (cf. ci-dessus). *On a*

$$\mathrm{rang}_K v(F) \leqslant n^2 .$$

Par hypothèse, on peut écrire F comme quotient F_1/F_2, où F_1 est isomorphe à un sous-objet d'un E^m, pour m convenable. Soit $x \in v(F)$ engendrant F et soit x_1 un élément de $v(F_1)$ dont l'image dans $v(F)$ est x. Soit G le plus petit sous-objet de E^m tel que $v(G)$ contienne x_1. On a $G \subset F_1$ et l'image de G dans $F = F_1/F_2$ est égale à F. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{rang}_K v(G) \leqslant n^2$. Si $m \leqslant n$, c'est évident. Supposons donc que $m > n$. On a $x_1 \in v(G) \subset v(E^m) = v(E)^m$. Soient $y_1, \ldots, y_m$ les composantes de x_1, considéré comme élément de $v(E)^m$. Puisque $m > n$, il existe des $a_i \in K$, non tous nuls, tels que $\sum a_i y_i = 0$. Or les a_i définissent un morphisme surjectif $E^m \to E$; si N est le noyau de ce morphisme, on a $N \simeq E^{m-1}$, comme on le voit facilement. D'autre part, on a $x_1 \in v(N)$, d'où $G \subset N$ puisque x_1 engendre G. On a donc obtenu un plongement de G dans E^{m-1}; d'où le lemme, en raisonnant par récurrence sur m.

b) *Le cas fini; construction d'un générateur projectif.*

Les hypothèses étant les mêmes que ci-dessus, on choisit un objet P de M pouvant être engendré par *un* élément $x \in v(P)$, et tel que $v(P)$ soit *de rang maximum* parmi ceux jouissant de cette propriété. C'est possible en vertu du Lemme 2.

LEMME 3. (i) *Le couple* (P, x) *représente le foncteur* v.

(ii) P *est un générateur projectif de* M.

Il suffit de prouver (i); l'assertion (ii) en résultera, puisque le foncteur v est exact et fidèle.

Soient donc $F \in M$, et $y \in v(F)$. Il nous faut prouver l'existence et l'unicité d'un morphisme $f : P \to F$ transformant x en y. L'unicité provient de ce que x engendre P. Pour démontrer l'existence, soit Q le plus petit sous-objet de $P \times F$ tel que $v(Q)$ contienne (x, y). Le morphisme $Q \to F$ induit par pr_1 est surjectif, du fait que P est engendré par x. On a donc

$$\mathrm{rang}_K v(Q) \geqslant \mathrm{rang}_K v(P) ;$$

mais le caractère maximal de $v(P)$ entraîne qu'il y a égalité; le morphisme $Q \to P$ est donc un isomorphisme. En composant son inverse avec la seconde projection $Q \to F$, on obtient un morphisme f ayant la propriété voulue.

c) *Le cas fini; fin de démonstration.*

Soit A l'algèbre des endomorphismes de P. C'est une K-algèbre de dimension finie. Le lemme suivant est bien connu:

LEMME 4. *Il existe un foncteur* $\varphi : \mathrm{Mod}^f_{A^o} \to M$ *et un seul* (à isomorphisme près) *qui soit exact à gauche et transforme* A (considéré comme A-module à droite) *en* P. *Ce foncteur est une équivalence de catégories.*

Indiquons brièvement la démonstration. Pour chaque A-module à droite H de rang fini, on choisit une *présentation finie* de H:

$$A^p \xrightarrow{\alpha} A^q \to H \to 0$$

où α est une $p \times q$-matrice à coefficients dans A. Cette matrice définit un morphisme $P^p \to P^q$ et l'on prend pour $\varphi(H)$ le *conoyau* de ce morphisme. On prolonge de façon évidente φ en un foncteur $\mathrm{Mod}^f_{A^o} \to M$ et l'on vérifie qu'il a la propriété voulue. On note généralement ce foncteur $H \mapsto H \otimes_A P$. C'est un adjoint du foncteur $F \mapsto \mathrm{Hom}^M(P, F)$. Son unicité est immédiate. Le fait que ce soit une équivalence résulte de ce que P est un générateur projectif de M.

De plus, l'équivalence $\varphi : H \mapsto H \otimes_A P$ transforme le foncteur «espace vectoriel sous-jacent à un A-module» en un foncteur isomorphe à v (en effet le premier foncteur est représentable par A, le second par P, et φ transforme A en P). On peut donc prendre pour cogèbre la cogèbre duale de l'algèbre A, et toutes les conditions sont vérifiées.

d) *Cas général.*

Soit X l'ensemble des sous-catégories N de M telles qu'il existe $E \in M$ avec $N = M_E$. L'ensemble X est ordonné filtrant puisque $M_{E_1 \times E_2}$ contient M_{E_1} et M_{E_2}. Si $N \in X$, soit comme ci-dessus (P_N, x_N) un couple représentant la restriction à N du foncteur v, et soit $A_N = \mathrm{End}(P_N)$. Si $N_1 \supset N_2$, il existe un unique morphisme $P_{N_1} \to P_{N_2}$ transformant x_{N_1} en x_{N_2}; on voit aisément que ce morphisme identifie P_{N_2} au plus grand quotient de P_{N_1} appartenant à N_2. En particulier, tout endomorphisme de P_{N_1} définit par passage au quotient un endomorphisme de P_{N_2}. D'où un homomorphisme $A_{N_1} \to A_{N_2}$ qui est surjectif. Si A désigne l'algèbre profinie limite projective des A_N, pour $N \in X$, il est alors clair que la cogèbre duale de A répond à la question.

Quant à l'*unicité* de cette cogèbre (ou de l'algèbre A), elle provient de la remarque suivante: *A est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes du foncteur v*, munie de la topologie de la convergence simple.

Remarque. Il est probablement possible d'éviter le passage par le cas $M = M_E$, en utilisant le théorème de Grothendieck disant qu'un foncteur exact à droite est prorepréSentable: on appliquerait ce théorème à v, d'où $P \in \mathrm{Pro}\, M$ représentant v et on obtiendrait A comme l'algèbre des endomorphismes de P.

§ 3. Bigèbres

3.1. Définitions et conventions

(Dans ce n°, ainsi que dans le suivant, on ne suppose pas que K soit un corps.)

Rappelons (cf. *Alg.* III) qu'une *bigèbre* sur K est un K-module C muni d'une structure de cogèbre $d: C \to C \otimes C$ et d'une structure d'algèbre $m: C \otimes C \to C$, ces structures vérifiant l'axiome suivant:

(i) Si l'on munit $C \otimes C$ de la structure d'algèbre produit tensoriel de celle de C par elle-même, d est un homomorphisme d'algèbres de C dans $C \otimes C$.

Cet axiome équivaut d'ailleurs à:

(i′) L'application $m: C \otimes C \to C$ est un morphisme de cogèbres (pour la structure naturelle de cogèbre de $C \otimes C$).

Dans tout ce qui suit, nous réserverons le terme de *bigèbres* à celles vérifiant les conditions suivantes:

(ii) La cogèbre (C, d) possède une co-unité $e: C \to K$.

(iii) L'algèbre (C, m) est commutative, associative, et possède un élément unité 1.